

מבחן מועד א' – מבוא לאלגברה לינארית 1 – 14/06/23

זמן המבחן: 4 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 30 נק', ענו על כל השאלות.

1. (שאלה מבגרות) נתונה המשוואה $2z^2 - (m - 2)z - \frac{1}{8}i = 0$

כאשר z מספר מרוכב וכן m פרמטר מרוכב.

א. z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה הנתונה. מצאו עבור איזה ערך של m מתקיים כי $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -4$.

ב.

i. מצאו עבור אילו ערכים של m יש למשוואה הנתונה פתרון יחיד.

ii. הראו כי כל הפתרונות עבור ערכי m שמצאתם בסעיף ב.i נמצאים על ישר אחד העובר בראשית הצירים.

iii. הראו כי כל הפתרונות עבור ערכי m שמצאתם ב.i נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים.

2. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר, ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ x + (a - 1)y + (a + 1)z = a - 1 \\ -x + (a^2 - 2a)z = a - 1 \\ (a - 1)x + (1 - a)y + (a^2 - a - 1)z = 1 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

ב. עבור $a = 0$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

ג. האם קיימים a, t עבורם הוקטור $(t, 1, 0)$ הוא פתרון למערכת?

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים לשלושת מרחבי המטריצה $C(A), R(A), N(A)$

ב. מצאו בסיס ל $C(A) \cap R(A)$

4. נביט בתתי המרחבים

$$U = \{(x, y, z) | x - y + z = 0\}$$

$$W = \text{span}\{(0, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3)\}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים ל U, W .

ב. מצאו בסיס ומימד ל $U \cap W$.

ג. מצאו את נקודת החיתוך בין הישר שמצאתם בסעיף ב' לבין המישור $x + y + z = 1$.