תורת הקבוצות־ תרגיל בית 6

1. הוכיחו/הפריכו:
א. קיים סודר $\alpha \neq 0$ כך ש $\omega \cdot \alpha = \alpha$.
ב. קיים סודר $\alpha \neq 0$ כך ש $\alpha \cdot \omega = \alpha$.
א. הוכחה: הראינו בכיתה שלכל $\alpha \neq 0$ הפונקציה $f(\beta) = \alpha\beta$ היא מונוטונית ורציפה ולכן קיימת לה נקודת שבת.
ב. הפרכה: $\omega > 1$ ולכן $\alpha \cdot \omega > \alpha \cdot 1 = \alpha$.

2. תזכורת: בתרגול הגדרנו חזקות סודרים ברקורסיה באופן הבא:
עבור $\alpha \neq 0$

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ \alpha^\gamma \cdot \alpha & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \alpha}\{\alpha^\gamma\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכיחו באמצעות משפט ההגדרה ברקורסיה שהפונקציה הרקורסיבית $f(\beta) = \alpha^\beta$ אכן מגדירה פונקציה $f : ON \to ON$. כלומר, מצאו את הפונקציות F, G המתאימות מהמשפט.
נרצה פונקציה שמקיימת את הנוסחא הבאה:

$$G(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ G(\gamma) \cdot \alpha & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \beta}\{G(\gamma)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

לצורך כך נגדיר: $F : ON \times Par(ON, ON) \to ON$

$$F(\beta, g) = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ g(\max A') \cdot \alpha & \text{if } \max A' \text{ exist} \\ \sup(Im(g)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר A' הוא התחום של הפונקציה החלקית g. שימו לב שאכן נקבל $G(\beta) = F(\alpha, G|_{\beta\downarrow})$ מכיוון שβ גבולי אמ"ם לקבוצת הקודמים שלו יש מקסימום.