מבוא לטופולוגיה – תרגיל 5 (פתרון)

1. יהיו σ ו- τ טופלוגיות על $\mathbb{R}$ כאשר τ מושרת על ידי מטריקה אוקלידית ו-σ היא טופולוגית זורגנפריי.
(תזכורת: $\sigma = \left\{\bigcup_{\alpha\in I}[a_\alpha, b_\alpha) \mid a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, a_\alpha \leq b_\alpha \right\}$, כאשר אנחנו מתכוונים את <u>כל האחודים האפשריים</u> של הקטעים החצי פתוחים מימין.)
יהיו $s_{\tau\sigma}: (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\sigma)$, $s_{\sigma\tau}: (\mathbb{R},\sigma) \to (\mathbb{R},\tau)$ שתי פונקציות כך ש- $s_{\sigma\tau}(x) = s_{\tau\sigma}(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
איזו משתי הפונקציות (או שתיהן) :
א) רציפה ?
ב) פתוחה ?
ג) סגורה ?
ד) היא הומאומורפיזם ?
נמקו.

<u>פתרון</u>

1.1. קודם כל נוכיח ש- <u>$\sigma \subseteq \tau$.</u>

יהי $U \in \tau$ ו-p נקודה <u>כלשהי</u> ב-U. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$I \supseteq (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$.
אבל

$$p \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[p-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{n}, p+\varepsilon) \ \in \sigma$$

זאת אומרת, נקודה p , דנבחרה שרירותית ב-U היא פנימית ב-U ביחס לטופולוגיה σ. ולכן $U \in \sigma$, משה רוצחנו להוכיח.

(a) $s_{\sigma\tau}$ רציפה כי אם $U \in \tau$ אז $s_{\sigma\tau}^{-1}(U) = U \in \sigma$ (לפי 1.1)
$s_{\tau\sigma}$ אינה רציפה כי $[0,1)$ פתוחה ב-σ ו-$s_{\tau\sigma}^{-1}([0,1)\ ) = [0,1)$ אינה פתוחה ב-τ.

(b) $s_{\sigma\tau}$ אינה פתוחה כי $[0,1)$ פתוחה ב-σ ו-= $s_{\sigma\tau}([0,1))$ $[0,1)$

אינה פתוחה ב-τ.

$s_{\tau\sigma}$ פתוחה כי אם $U \in \tau$ אז $s_{\tau\sigma}(U) = U \in \sigma$ (לפי 1.1)

(c) כיוון ששתי הפונקציות $s_{\sigma\tau}$ ו-$s_{\tau\sigma}$ חח"ע ועל,לכל

תתקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ הן מקיימות את השוויונות:

$s_{\sigma\tau}(A^c) = s_{\sigma\tau}(A)^c$,$s_{\tau\sigma}(A^c) = s_{\tau\sigma}(A)^c$

.$s_{\sigma\tau}^{-1}(A^c) = s_{\sigma\tau}^{-1}(A)^c$,$s_{\tau\sigma}^{-1}(A^c) = s_{\tau\sigma}^{-1}(A)^c$

A פתוחה $\Leftrightarrow$ A^c סגורה ו- A סגורה $\Leftrightarrow$ A^c פתוחה (הגדרות).

לכן הפונקציות האלה סגורות אך ורק כשהן פתוחות.

מ-ב) נובע ש-$s_{\sigma\tau}$ אינה סגורה ו-$s_{\tau\sigma}$ סגורה.

(d) $s_{\sigma\tau}$ אינה פתוחה (ב) לכן היא לא הומאומורפיזם (ההרצאה).

$s_{\tau\sigma}$ אינה רציפה (א) לכן היא לא הומאומורפיזם (ההרצאה).

2. תהי פונקציה $f: (X_1, \tau_1) \to X(X_2, \tau_2)$ רציפה. $\tau_1 \subseteq \sigma_1, \tau_2 \supseteq \sigma_2$.

תוכיחו: $f: (X_1, \sigma_1) \to X(X_2, \sigma_2)$ רציפה.

<u>הוכחה</u>

יהי $B \subseteq Y$ ו-$B \in \sigma_2$. אזי $B \in \tau_2$ ולפי הגדרת הרציפות $f^{-1}(B) \in \tau_1$. אז לפי התנאים $f^{-1}(B) \in \sigma_1$. לפי הגדרת הרציפות $f: (X, \sigma_1) \to (Y, \sigma_2)$ רציפה.

3. יהיו X, Y, Z מרחבים טופולוגיים ויהיו $f: X \to Y, g: Y \to Z$,פונקציות

כך ש- f – רציפה בנקודה a , g – רציפה בנקודה $f(a)$.

תוכיחו: $g \circ f$ רציפה בנקודה a .

<u>הוכחה</u>

תהי $b = f(a)$ ו-$c = g(b)$. תהי $c \in$ סביבה של c. כיוון ש-

g – רציפה בנקודה b קיימת סביבה V_b של b כך ש-$g(V_b) \subseteq W_c$. אבל כיוון ש-f – רציפה בנקודה a קיימת סביבה U_a של a כך ש-$f(U_a) \subseteq V_b$.

לכן: $g \circ f(U_a) = g\big(f(U_a)\big) \subseteq g(V_b) \subseteq W_c$. ז"א $g \circ f$ רציפה בנקודה a, מצ"ל.

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים כך שלכל שתי נקודות $b_1 \neq b_2$ ב-Y קיימות סביבות $b_1 \in V_1 \subseteq Y$ ו- $b_2 \in V_2 \subseteq Y$ הלא נחתכות, ז"א, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
(במקרה כזה אומרים ש-Y *הוא מרחב האוסדורף*).
יהיו $f, g\colon X \to Y$ שתי העתקות הרציפות.
תוכיחו שהקבוצה $F = \{x \in X |\ f(x) = g(x)\}$ היא קבוצה סגורה ב-X.

<u>הוכחה.</u>

מספיק להוכיח שקבוצה $F^c = \{x \in X |\ f(x) \neq g(x)\}$ פתוחה.
יהי $a \in F^c$. אזי $f(a) = b_1 \in Y$ ו-$g(a) = b_2 \in Y$ כאשר $b_1 \neq b_2$. מהתנאים (Y *הוא מרחב האוסדורף*) קיימות סביבות $b_1 \in V_1 \subseteq Y$ ו- $b_2 \in V_2 \subseteq Y$ כך ש- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. מרצחפותן של f ו-g נובע שקיימות סביבות $a \in U_1 \subseteq X$ ו- $a \in U_2 \subseteq X$ כך ש-$f(U_1) \subseteq V_1$ ו-$g(U_2) \subseteq V_2$.
נסמן $U = U_1 \cap U_2$. אזי $a \in U$, ו-$f(U) \subseteq V_1$ ו-$g(U) \subseteq V_2$.
מכיוון ש-$V_1 \cap V_2 = \emptyset$,גם $f(U) \cap g(U) = \emptyset$. לו עכשיו היינו מוצאים $x \in U$ כך ש-$y = f(x) = g(x)$ אז y היה שייך ל-$f(U) \cap g(U)$. וכוון שהחיתוך הזה ריק אנחנו יכולים להגיד שלכל $x \in U$ $f(x) \neq g(x)$,ז"א, $a \in U \subseteq F^c$, ז"א, a נקודה פנימית של F^c.
אז F^c פתוחה ו- F סגורה.■

5. תוכיחו תכונות בסיסיות של סגור ופנים
(אפילו אם חלקן הוכח בהרצאה):
(a) $A \subseteq \bar{A}$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
(c) $\bar{A}$ קבוצה סגורה
(d) אם F קבוצה סגורה ו-$A \subseteq F$ אזי $\bar{A} \subseteq F$
(e) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(f) A סגורה $\Leftrightarrow \bar{A} = A$
(g) נקודה p שייכת ל- $\bar{A} \Leftrightarrow$ כל סביבה של p נחתכת עם A.
(h) A° קבוצה פתוחה.
(i) A° היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב-A.
(j) אם U קבוצה פתוחה ו-$U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^{\circ}$
(רמז: סדר נכון של הוכחת הסעיפים יקל את העבודה)

<u>הוכחה</u>

<u>תזכורת, הגדרה.</u> יהי X מ"ט. הקבוצה
$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A, \\ F-\text{סגורה}}} F$ נקראת *סגור של* A.

(c) $\bar{A}$ -סגורה כחיתוך סגורות.
(a) כל איברי החיתוך מכילים A . אז גם החיתוך עצמו מכיל A.
(d) F אחד מאיברי החיתוך $\bar{A}$ ולכן מכיל אותו.
(b) יהי $A \subseteq B$. (a) גורר $A \subseteq \bar{B}$. $\bar{B}$ סגורה לפי (c).
ולכן $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ לפי (d).
(f) $A \Leftarrow \bar{A} = A$ סגורה לפי (c).
$A \subseteq A,$ A סגורה $\Leftarrow$ $\bar{A} \subseteq A,$ לפי (d) $A \subseteq \bar{A},$ לפי (a).
ו-(f,c) גוררים (e) .
(g) <u>$\Leftarrow$</u> נניח $p \in \bar{A}$ ו-(בדרך השלילה) קיימת <u>סביבה U של p</u> כך
ש- $U \cap A = \emptyset$. אזי U^c סגורה ו- $A \subseteq U^c$. אז לפי *(d)* $\bar{A} \subseteq U^c$
ולכן- $p \in U^c$. <u>סתירה</u>.
<u>$\Rightarrow$</u> נניח כל סביבה של p נחתכת עם A ו-(בדרך השלילה)
$p \notin \bar{A}$. אזי לפי (c) $\bar{A}$ קבוצה סגורה ולכן $(\bar{A})^c$
פתוחה . מכיוון ש- $p \in (\bar{A})^c$ $(\bar{A})^c$ אמורה להיחתך
עם A, אבל זה לא יכול להיות כי $(\bar{A})^c \subseteq A^c$ לפי "a". <u>סתירה</u>.
(h) A° קבוצה פתוחה כאחוד הפתוחות.
(i) אם $p \in A^{\circ}$ אז לפי הגדרה $A^{\circ} \subseteq A$ ו-$p \in A$. אבל לפי (h) A°
פתוחה, אזי p נקודה פנימית ב-A .
הפוך: אם p נקודה פנימית ב-Aת אזי קיימת קבוצה U פתוחה כך

ש-$A \subseteq U \in p$. לכן $p \in A^\circ$ לפי הגדרת הפנים.

(j) אם U קבוצה פתוחה ו-$U \subseteq A$ אזי $U \subseteq A^\circ$ כי A° איחוד של כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב-A (הגדרת הפנים).

6. תהי A תת-קבוצה במרחב טופולוגי.

א) תוכיחו: $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

<u>הוכחה</u>

$$(A^\circ)^c = \left(\bigcup_{U\subseteq A-\text{פתוחה}} U\right)^c = \bigcap_{U\subseteq A-\text{פתוחה}} U^c = \bigcap_{U^c\supseteq A^c-\text{סגורה}} U^c = \bigcap_{F\supseteq A^c-\text{סגורה}} F = \overline{A^c}$$

ב) תוכיחו ש- $\bar{A} - A^\circ$ קבוצה סגורה.

<u>הוכחה</u>

$$\bar{A} - A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

A° - פתוחה , לכן $(A^\circ)^c$ – סגורה . כיוון ש-$\bar{A}$ – סגורה,
$\bar{A} - A^\circ$ – סגורה כחתוך של שתי קבוצות סגורות, מצ"ל.

7. תהי $f: X \to Y$ הומאומורפיזם. תכיחו:

א) $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

ב) $f(A^\circ) = \left(f(A)\right)^\circ$

<u>הוכחה</u>

נסמן ב- τ_X, τ_Y טופולוגיות במרחבים X, Y בהתאם.

תהי $\hat{f}: \tau_X \to \tau_Y$ העתקה כך ש- לכל $U \in \tau_X$: $\hat{f}(U) = f(U)$. לפי הגדרת ההומאומורפיזם $\hat{f}$ היא העתקה חח"ע ועל. או במילים אחרות :

$\Leftrightarrow U \in \tau_X$, וזה מייד גורר "ב)" ,

כי לפי הגדרת הפנים וכיוון ש-f חח"ע ועל:

$$f(A^\circ) = f\left(\bigcup_{A\supseteq U\in\tau_X} U\right) = \bigcup_{f(A)\supseteq f(U)=V\in\tau_Y} V = \left(f(A)\right)^\circ$$

אם F סגורה ב-X אז $F^c \in \tau_X$ ו-
$f(F^c) \in \tau_Y \Leftrightarrow F^c \in \tau_X$. כיוון ש-$f$ חח"ע ועל,
אנחנו נעבור למשלימים ונקבל מזה :
$F-$ סגורה $\Leftrightarrow f(F)$, וזה מייד גורר "א)" ,
כי לפי הגדרת הסגור וכיוון ש-f חח"ע ועל:

$$f(\bar{A}) = f\left(\cap_{A\subseteq F, F^c\in\tau_X} F\right) = \cup_{f(A)\subseteq f(F)=G, G^c\in\tau_Y} G = \overline{f(A)}$$