בס"ד

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

שיעור 10: כלל לופיטל, הגדרות של גבולות במונחים של ε,δ,A,B (ממשיים).

הגדרה: קטע פתוח (a,b) כך ש- $c\in(a,b)$ נקרא **סביבה** של c.

הגדרה: תהי I סביבה של c, אזי $I\setminus\{c\}$ נקרא **הסביבה המנוקבת** של c.

כלל לופיטל לגבולות מהצורה "$\frac{0}{0}$":

תהיינה $f(x),g(x)$ גזירות בסביבה מנוקבת כלשהי של c ו- $g'(x)\neq 0$.

וכן $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$. אם $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים או אינסופי, אזי

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלל זה נכון גם כאשר $x\to c^+,x\to c^-,x\to\infty,x\to-\infty$.

כלל לופיטל לגבולות מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$":

תהיינה $f(x),g(x)$ גזירות בסביבה מנוקבת כלשהי של c ו- $g'(x)\neq 0$.

וכן $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$. אם $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים או אינסופי, אזי

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלל זה נכון גם כאשר $x\to c^+,x\to c^-,x\to\infty,x\to-\infty$.

תרגיל:

חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$$

פתרון:

זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הפונקציות גזירות וקיימת סביבה של $x=0$ שבה הנגזרת של המכנה:

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

.

לכן, נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{2x}-1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{2}{\frac{1}{1}}=2$$

וזהו הגבול.

ה. $\lim_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}$ **גבול מהצורה "$\infty\cdot 0$"**

פתרון:

$\lim_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{-x}}$ הגבול האחרון הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$" כל התנאים של כלל לופיטל מתקיימים, כלומר המונה והמכנה הן פונקציות גזירות בכל קרן מהצורה (a,∞) כאשר $a>0$ והנגזרת של המכנה לא מתאפסת בקרן ולכן

$\lim_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$ שימו לב המעבר האחרון (למכפלת הגבולות) מוצדק, כי הגבול של $\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$ (השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל)

לסיכום $\lim_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\infty$

ו. $\lim_{x\to 0^+}x^x$ **גבול מהצורה "0^0"**

פתרון:

$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln x}$ המעבר האחרון מותר בגלל הרציפות של הפונקציה e^x.

מספיק לחשב $\lim_{x\to0^+}(-x)=0=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}x\ln x$ (כאן השתמשנו בכלל לופיטל)

לסיכום נקבל $\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1$

ז. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ גבול מהצורה "$\infty-\infty$"

פתרון:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x}{x\ln x+x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-1}{\ln x+1+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

עשינו מכנה משותף וכלל לופיטל פעמיים.

ח. $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$ גבול מהצורה "∞^0"

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}}$$

ולכן מספיק לחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}$ שהינו מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$".

נשתמש בכלל לופיטל $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{3x}}{9e^{3x}}=3$

(למעשה הפעלנו את כלל לופיטל 3 פעמים).

לסיכום נקבל $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

ט. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ גבול מהצורה "1^∞"

פתרון:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(\cos x)/x^2}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

מספיק לחשב את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ שהינו מהצורה "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cos x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}$ (במעבר הראשון השתמשנו בכלל לופיטל)

לסיכום נקבל $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

הגדרת הגבולות במונחים של ε,δ

הגדרה: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ (ממשי) קיים $\delta > 0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $0 < |x-c| < \delta$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

הגדרה: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ (ממשי) קיים $\delta > 0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $c < x < c+\delta$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

הגדרה: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ (ממשי) קיים $\delta > 0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $c-\delta < x < c$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

הגדרה: $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ (ממשי) קיים $B > 0$ (ממשי התלוי ב- ε) כך שלכל $x > B$ מתקיים $|f(x)-L| < \varepsilon$.

<u>תרגיל:</u>

השתמשו בהגדרת הגבול במונחי ε, δ כדי להוכיח שמתקיים:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}(x-1) = -3$$

<u>פתרון:</u>

יהי $\varepsilon > 0$ ממשי.

נחפש $\delta > 0$ ממשי (התלוי ב-ε) כך שלכל x ממשי המקיים: $|x+2| = |x-(-2)| < \delta$

מתקיים:

$$|x-1-(-3)| = |x+2| < \varepsilon$$

אם נבחר $\delta = \varepsilon$ נקבל את הדרוש.

<u>תרגיל:</u>

השתמשו בהגדרת הגבול במונחי ε, δ כדי להוכיח שמתקיים:

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \left(x^2 - x - 1\right) = 5$$

<u>פתרון:</u>

יהי $\varepsilon > 0$ ממשי.

נחפש $\delta > 0$ ממשי (התלוי ב-ε) כך שלכל x ממשי המקיים: $|x - 3| < \delta$ מתקיים:

$$\left|x^2 - x - 1 - 5\right| < \varepsilon$$

כלומר, נדרוש:

$$\left|x^2 - x - 6\right| = |(x - 3)(x + 2)| = |x - 3| \cdot |x + 2| < \varepsilon$$

אנו רוצים את ה-$|x - 3|$. איך ניפטר מה-$|x + 2|$?

נקבע $\delta = 1$. כעת, אם $|x - 3| < \delta = 1$, אז $2 < x < 4$, ואז:

$$|x + 2| < 6$$

ואם נדרוש:

$$|x - 3| \cdot 6 < \varepsilon$$

כלומר $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$, אם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ נקבל שאכן אם $|x - 3| < \delta$ יתקיים:

$$\left|x^2 - x - 1 - 5\right| < \varepsilon$$

כמו שרצינו.

עם זאת, נזכור שקבענו $\delta = 1$ כדי להגיע ל $-\frac{\varepsilon}{6}$, $\delta =$, ולכן בסה"כ נבחר:

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

5. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים ε,δ על מנת להוכיח ש- $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-3}=-5$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ממשי. צריך למצוא $\delta > 0$ ממשי התלוי ב- ε כך שלכל x המקיים $|x-2|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}$$

נבחר $\delta=\frac{1}{2}$ (שימו לב שצריך לבחור $\delta<1$ כדי שנקודת אי הרציפות $x=3$ לא תהיה בסביבת הנקודה $x=2$), במקרה זה נקבל $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$ ולכן $-\frac{3}{2}<x-3<-\frac{1}{2}$ ולכן $-2<\frac{1}{x-3}<-\frac{2}{3}$ ולכן $\frac{1}{|x-3|}<2$.

נחזור לאי שוויון המבוקש $\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}<7\cdot\delta\cdot 2<\varepsilon$, כלומר צריך להתקיים $\delta<\frac{\varepsilon}{14}$ ולכן מספיק לבחור $\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{14},\frac{1}{2}\right\}$.

1. חשבו את הגבולות הבאים: (היעזרו בכלל לופיטל אם ניתן)

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$", אך גבול מנת הנגזרות $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ **אינו קיים** ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$$

בס"ד

ב. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$", אך גבול מנת הנגזרות $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ אינו קיים ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$.\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot0=0$$