נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

משוואת בסל:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y$$

פתרונות המשוואה הם פונקציות בסל J_ν

בנוסף, פתרונות המשוואה:

$$y'' + y = 0$$

הם:

$$y(x) = A\sin x + B\cos x$$

ופתרונות המשוואה:

$$y'' + my = 0$$

הם:

$$y(x) = A\sin mx + B\cos mx$$

הערה

האופרטור $D^2: y \to y''$ מודד הפרש בין y בנקודה לבין ממוצע של y בסביבת הנקודה.

$$\begin{aligned} y' &\approx \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)] \\ y'' &\approx \frac{1}{2h^2}\big[[y(x+h) - y(x)] - [y(x) - y(x-h)]\big] \\ &= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{y(x+h) + y(x-h)}{2} - y(x)\right] \end{aligned}$$

משוואת המיתר

$$\begin{cases} y'' + m^2y = 0 \\ y(0) = 0, y(L) = 0 \end{cases}$$

$$m \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$$

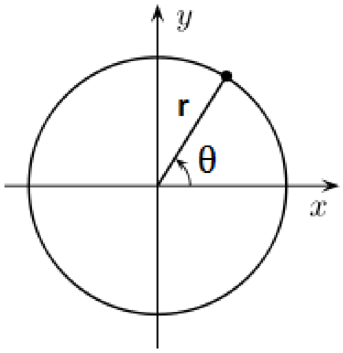
$$\Delta y + m^2y = 0$$

על השפה:

$$y \equiv 0$$

הערה

נניח שרוצים לפתור את המשוואה $\Delta y + m^2y = 0$ בגיאומטריה פשוטה יחסית של דיסק $y\,|_s = u(\theta)$ (Δ הוא הלפלסיאן, כלומר הכללה של נגזרת שנייה).



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

בגלל הסימטריות, נחפש פתרונות מהצורה:

$$y(r,\theta) = R(r)\cdot T(\theta)$$
$$\Longrightarrow \Delta = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + m^2 y = 0$$

לכן הצבת הצורה המיוחדת

$$y = R(r)\cdot T(\theta)$$

נותן את המשוואה:

$$0 = R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) + m^2R(r)T(\theta)$$
$$0 = r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} + r^2m^2$$

(הפרדת משתנים)

$$\Longrightarrow \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = C \Longrightarrow C = -n^2$$
$$T(\theta) = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta)$$

כאשר $u(\theta) \equiv 1$ קבוע, גל סימטרי רדיאלי, נקבל בהכרח $n = 0$.

$$0 = r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + (r^2m^2 - n^2)$$

פתרונות למשוואה יהיו:

$$R_m(r) = R(mr)$$

כאשר $R(r)$ פותר את המשוואה:

$$0 = r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2 - n^2)R(r)$$

זוהי משוואת בסל ב – r.

מסקנה: J_0 הוא "בן-דוד" של $\cos x$ במישור. J_n נובע מפתרונות עם שינוי בכיוון θ.