פתרון תרגיל 6 מרוכבות תיכוניסטים תשע"ח

27 במאי 2018

1. הוכחה בקווים כלליים. אפשר להוכיח בהרבה שיטות נוספות.
נסמן: $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, כאשר $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, נניח בשלילה שלכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $p(z) \neq 0$. לפי עיקרון המקסימום, בעיגול שמרכזו בראשית ורדיוסו R, $|p|$ מקבל את המקסימום על השפה, שבה $|z| = R$.
מתקיים:

$$\lim_{|z| \longrightarrow \infty} |p(z)| = \infty$$

חשבו למה. לכן, קיים R עבורו $|p(0)| < |p(z)|$ לכל z המקיים: $|z| = R$.
כלומר, $\frac{1}{|p(0)|} < \frac{1}{|p(z)|}$ לכל $|z| = R$. מכיוון שהפולינום p לא מתאפס, הפונקציה $\frac{1}{p}$ אנליטית, ולפי עיקרון המקסימום $\left|\frac{1}{p}\right|$ צריכה לקבל את המקסימום שלה על השפה שבה $|z| = R$, אך אנו רואים שהערך בנקודה הפנימית 0 גדול יותר מכל הערכים על השפה, וסתירה.

2. אנו, כתותחי טרינום, יכולים לרשום:

$$f(z) = (z-1)(z-2)$$

הפונקציה אנליטית בתחום ולכן - לפי עיקרון המקסימום - $|f|$מקבלת את המקסימום על השפה, כאשר $|z| = 1$. כעת:

$$|f(z)| = \left|z^2 - 3z + 2\right| \leq \left|z^2\right| + 3|z| + 2 = 6$$

האם יש נקודה z_0 עבורה $|f(z_0)| = 6$? קליל לראות שעבור $z = -1$ נקבל שאכן $|f(-1)| = f(-1) = 6$. איך נבדוק אם קיימות נקודות נוספות?
אם נסמן: $z = x + iy$, נקבל:

$$|f(z)| = \left|z^2 - 3z + 2\right| = \left|x^2 + 2xyi - y^2 - 3x - 3iy + 2\right| =$$

נזכור שאנו על מעגל היחידה, כלומר $y^2 = 1 - x^2$, ולכן:

$$|f| = \left|x^2 + 2xyi - 1 + x^2 - 3x - 3iy + 2\right| = \left|2x^2 - 3x + 1 + (2xy - 3y)i\right|$$

אם נעלה בריבוע, לפי הגדרת ערך מוחלט נקבל:

$$|f|^2 = \left(2x^2-3x+1\right)^2 + \left(2xy-3y\right)^2$$

נפתח:

$$|f|^2 = 4x^4+9x^2+1-12x^3-6x+4x^2+4x^2y^2-12xy^2+9y^2$$

שוב, הצבה $y^2 = 1-x^2$ תיתן לנו:

$$|f|^2 = 4x^4+9x^2+1-12x^3-6x+4x^2+4x^2\left(1-x^2\right)-12x\left(1-x^2\right)+9\left(1-x^2\right)$$

נפתח סוגריים ונסדר, ונישאר עם:

$$|f|^2 = 8x^2-18x+10$$

כאשר התחום של x הוא $[-1,1]$, המקסימום היחידי אכן מתקבל כאשר $x=-1$. זהו גם המקסימום היחידי של $|f|$.

3. שוב, f אנליטית ולכן המקסימום מתקבל על השפה, מעגל היחידה. נקודה על מעגל היחידה היא מהצורה $e^{i\theta}$ כאשר $\theta \in [0,2\pi]$, ולכן אפשר לרשום:

$$f\left(e^{i\theta}\right) = e^{2i\theta} - \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2} = \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} + \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)i$$

כעת, נתבונן בפונקציה:

$$|f|^2 = \left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 =$$

$$= \cos^2 2\theta + \frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{1}{4} + \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \cos\theta\cos 2\theta + \sin^2 2\theta - \sin 2\theta\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{4}$$

מהזהות: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, נקבל:

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \left(\cos\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\sin\theta\right)$$

כעת, לפי הזהות: $\cos\theta = \cos\left(2\theta-\theta\right) = \cos\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\sin\theta$, נקבל:

$$= \frac{3}{2} + \cos 2\theta - \frac{3\cos\theta}{2} = 2\cos^2\theta - \frac{3\cos\theta}{2} + \frac{1}{2} = 2\left(\cos\theta - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{32}$$

אנו רואים שהמקסימום מתקבל כאשר $\cos\theta = -1$, כלומר כאשר $\theta = \pi$; הנקודה המתאימה היא $e^{-\pi i} = -1$, והערך הוא $f\left(-1\right) = 2$.

4. שוב, f אנליטית ולכן לפי עיקרון המקסימום, המקסימום של $|f|$ יתקבל כאשר $|z|=2$, על השפה. נקודה על השפה היא $2e^{i\theta}$. כעת:

$$\left|f\left(2e^{i\theta}\right)\right|=\left|e^{4e^{2i\theta}-2e^{u\theta}}\right|=\left|e^{4\cos 2\theta+4i\sin 2\theta-2\cos\theta-i\sin 2\theta}\right|=e^{4\cos 2\theta-2\cos\theta}$$

בדומה לתרגיל קודם, נבדוק מה המקסימום של המעריך והיכן הוא מתקבל:

$$g\left(\theta\right)=4\cos 2\theta-2\cos\theta=8\cos^2\theta-2\cos\theta+4=8\left(\cos\theta-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{31}{8}$$

אנו רואים שהמקסימום מתקבל כאשר $\cos\theta=-1$, כלומר כאשר $\theta=\pi$; הנקודה המתאימה היא $e^{-\pi i}=-1$, והערך הוא $f\left(-1\right)=e^2$.