1. הגדרה: מטריקה.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \to : f$. נגדיר $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$. הוכיחו שזו מטריקה אמ"ם f חח"ע.
עכשיו יש הרבה דוגמאו למטריקות.
3. תרגיל: עם $P(X)$: $d(A,B)=|A\triangle B|$ (X קבוצה סופית) זאת מטריקה. $d(A,C)+d(C,B)=|A\triangle C|+|C\triangle B|$ נשים לב ש $A\triangle B\subseteq A\triangle C\cup C\triangle B$.
4. הגדרה: אולטרה מטריקה.
5. תרגיל: המטריקה הp אדית היא אולטרה מטריקה.
6. נורמה משרה מטריקה.
7. הגדרה: מרחק בין מקודה לקבוצה.
8. ב $l_2=\left\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\sum|x_n|^2<\infty\right\}$ עם המטריקה המושרית מהנורמה $\|x\|=\sqrt{\sum|x_n|^2}$. מצאו את המרחק של $x=\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\dots\right)$ מ $A=\{e_i\}$
פתרון

$$d(e_i,x)=\|e_i-x\|=\sqrt{\sum_{n\neq i}\frac{1}{n^2}+\left(1+\frac{1}{i}\right)^2}=\sqrt{\sum_n\frac{1}{n^2}+1+\frac{2}{i}}$$

לכן $\inf_i d(e_i,x)=\sqrt{\sum_n\frac{1}{n^2}+1}$

9. אי שיוויון עם קבוצה. הוכיחו כי $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$. לכל $a\in A$ מתקיים $d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)$ ולכן

$$\inf\{d(x,a)\}\le\inf\{d(x,y)+d(y,a)\}=d(x,y)+\inf\{d(y,a)\}$$

10. הגדרה: קבוצה חסומה.
11. חסימות של איחוד קבוצות חסומות: נתון $dian\left(A_i\right)=r_i$ צ"ל $diam\left(\cup A_i\right)<\infty$
הוכחה: נבחר $a_i\in A_i$ ונגדיר $r=\max\{d(a_i,a_j)\}$ ואז טענה: $diam\left(\cup A_i\right)\le r+2\max\{r_i\}$. הוכחה: יהיו x,y אזי $d(x,y)\le d(x,a_i)+d(a_i,a_j)+d(a_j,y)\le r+2\max\{r_i\}$.
12. הגדרה: כדור פתוח. כדור סגור.
13. מצאו $B(a_1,r_1)\subset B(a_2,r_2)$ עם $r_1>r_2$.
פתרון: $X=[0,2]$ $B(0,1.5)\subset B(1,1)$
14. קבוצה חסומה אמ"מ היא מוכלת בכדור פתוח.
($\Rightarrow$)נתון $A\subseteq B(x,r)$ ואז עבור $a,a'\in A$ מתקיים כי $d(a,a')\le d(a,x)+d(x,a')\le 2r$ ולכן $diam(A)\le 2r$
($\Leftarrow$)נתון $diam(A)=r$. טענה: יהא $a\in A$ אזי $A\subseteq B(a,r)$ הוכחה: מהגדרה.

15. האם $diamB(a,r)=2r$. לא, למשל במטריקה הדיסקרטית $diamB(a,\frac{1}{2})=0$.

16. יהא $(X,\|\|)$ מרחב נורמי. יהא $\emptyset \neq A\subseteq X$. הוכיחו כי A חסומה אמ"מ $\sup\{\|x\| : x\in A\}<\infty$.
($\Rightarrow$)נסמן $r=\sup\{\|x\| : x\in A\}$ ואז $A\subseteq B(0,r)$
($\Leftarrow$) $A\subseteq B(y,r)$. טענה $\sup\{\|x\| : x\in A\}\leq r+\|y\|$ הוכחה: $x\in A$ לכן $\|x-y\|\leq r$ ולכן $\|x\|=\|x-y+y\|\leq r+\|y\|$

17. במטריקה ה 3 אדית
(א) מצאו את $B\left(0,\frac{2}{5}\right)$ ו$B\left[0,\frac{2}{5}\right]$.
פתרון $B\left(0,\frac{2}{5}\right)=B\left[0,\frac{2}{5}\right]=B\left[0,\frac{1}{3}\right]=3\mathbb{Z}$.

18. יהא (X,d) כאשר d אולטרה מטריקה. יהא $B=B(x,r)$ כדור. הוכיחו כי $B=B(x',R)$ לכל $x'\in B$
($\subseteq$) $y\in B$ אזי $d(x,y)\leq r$ ואז $d(x',y)\leq \max\{d(x',x),d(x,y)\}\leq r$
($\supseteq$) יהא $y\in B(x',r)$ אזי אזי $d(x',y)\leq r$ ואז $d(x,y)\leq \max\{d(x,x'),d(x',y)\}\leq r$.

19. הגדרה: התכנסות סדרות.

20. הוכיחו כי במטריקה ה5 אדית $2\cdot 3^n+5\to 5$
פתרון $d(2\cdot 3^n+5,5)=\frac{1}{3^n}\to 0$

21. ב l_∞ תהא $\{x^n\}$ וx. האם $x^n\to x$ גורר התכנסות רכיב-רכיב. האם להיפך?
פתרון $|x_m^n-x_m|\leq \sup_m|x_m^n-x_m|=\|x^n-x\|\to 0$. הצד השני לא נכון, למשל $x^n=e_n$ יש התכנסות רכיב רכיב ל 0 אבל $\|e_n-0\|=1$

22. הגדרה: איזומטריה. שיכון איזומטרי. (נשים לב ששירת מרחק גוררת חח"ע).

23. תהא $f:(X,d)\to(X,d)$ שיכון איזומטרי. הוכיחו/הפריכו f איזומטריה.
פתרון: הפרכה $X=l_\infty$ עם המטריקה המשורית מהנורמה. $f\left((x_n)_n\right)=0x_1x_2,\ldots$ שיכון איזומטרי.