בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשעז, מועד ב'

19 באוגוסט 2020

1. תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $A\subseteq B$ אז $A\triangle C\subseteq B\triangle C$
פתרון: הפרכה: $A=\{1\},B=C=\{1,2\}$ ואז $A\subseteq B$ אבל $A\triangle C=\{2\}\not\subseteq\emptyset=B\triangle C$

(ב) אם $A\backslash B\subseteq C$ אזי $A\backslash\left(B\cup C\right)=\emptyset$
פתרון: הוכחה:נניח $A\backslash B\subseteq C$ וצ"ל $A\backslash\left(B\cup C\right)=\emptyset$ נחשב לפי תכונות

$$A\backslash\left(B\cup C\right)=A\cap\left(B\cup C\right)^{c}=A\cap\left(B^{c}\cap C^{c}\right)=$$

$$=\left(A\cap B^{c}\right)\cap C^{c}=A\backslash B\cap C^{c}\subseteq C\cap C^{c}=\emptyset$$

הערה: אפשר להראות ש $A\subseteq B\cup C$ וזה מספיק בשביל ש $A\backslash\left(B\cup C\right)=\emptyset$.
למה זה נכון? יהא $a\in A$ אם $a\in B$ סיימנו. אחרת $a\notin B$ ולכן $a\in A\backslash B$ ולפי ההנחה ש $A\backslash B\subseteq C$ נקבל $a\in C$.

(ג) אם $A\subseteq P(B)$ אז $B\backslash A=B$
פתרון: הפרכה: $A=\{\emptyset\},B=\{1,\emptyset\}$ ואז

$$A=\{\emptyset\}\subseteq\{\emptyset,\{1\},\{\emptyset\},B\}=P(B)$$

אבל

$$B\backslash A=\{1\}\neq B$$

הערה: פתרון נוסף שהציעו $A=\{\{1\}\},B=\{1,\{1\}\}$.

(ד) אם $\left(A\cup B\right)\backslash C\subseteq\left(A\backslash B\right)\cap C$ אזי $A\subseteq C$
פתרון: הוכחה: נניח $\left(A\cup B\right)\backslash C\subseteq\left(A\backslash B\right)\cap C$ וצ"ל $A\subseteq C$ יהא $a\in A$ וצ"ל ש $a\in C$
נב"ש ש $a\notin C$ ואז $a\in A\cup B$ וגם $a\notin C$ ולכן $a\in\left(A\cup B\right)\backslash C$ ולפי ההנחה נקבל כי $a\in\left(A\backslash B\right)\cap C$ ובפרט $a\in C$ סתירה.

.2

(א) נגדיר יחס R על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ע"י הכלל

$$\left(a,b\right)R\left(c,d\right)\iff\left(a\leq c\right)\wedge\left(b=d\right)$$

i. הוכיחו כי R יחס סדר.
פתרון: הוכחה:

- רפלקסיביות: לכל $\left(m,n\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים כי $\left(m\leq m\right)\wedge\left(n=n\right)$ ולכן $\left(m,n\right)R\left(m.n\right)$
- אנטי-סימטריות: יהיו $\left(m_{1},n_{1}\right),\left(m_{2},n_{2}\right)$ כך ש $\left(m_{1},n_{1}\right)R\left(m_{2},n_{2}\right)$ וגם $\left(m_{2},n_{2}\right)R\left(m_{1},n_{1}\right)$ ולכן $\left(m_{1}\leq m_{2}\right)\wedge$ $\left(n_{1}=n_{2}\right)$ וגם $\left(m_{2}\leq m_{1}\right)\wedge\left(n_{2}=n_{1}\right)$ ולכן $\left(m_{1}\leq m_{2}\leq m_{1}\right)\wedge\left(n_{1}=n_{2}\right)$ ולכן $\left(m_{1}=m_{2}\right)\wedge\left(n_{1}=n_{2}\right)$ ולכן $\left(m_{1},n_{1}\right)=\left(m_{2},n_{2}\right)$

- טרנזיטיביות: יהיו $(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3)$ כך ש $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$ וגם $(m_2,n_2)R(m_3,n_3)$ ולכן $(m_1\leq m_2)\wedge$ $(n_1=n_2)$ וגם $(m_2\leq m_3)\wedge(n_2=n_3)$ולכן $(m_1\leq m_2\leq m_3)\wedge(n_1=n_2=n_3)$ ולכן $(m_1\leq m_3)\wedge(n_1=n_n)$ ולכן $(m_1,n_1)R(m_3,n_3)$

ii. מצאו את כל האיברים המינימאלים (לפי R)

פתרון: טענה: קבוצת האיברים המינמאלים היא $\{(1,b)\mid b\in\mathbb{N}\}$

- מצד אחד: יהא b טבעי ונראה כי $(1,b)$ מינימאלי. נניח $(m,n)R(1,b)$ וצ"ל ש $(m,n)=(1,b)$. מההנחה נקבל ש $(m\leq 1)\wedge(n=b)$ ומכיוון ש m טבעי גם $1\leq m$ ולכן $m=1$ ולכן $(m,n)=(1,b)$ כנדרש.
- מצד שני: יהא (m,n) מינמאלי ונראה שהוא בקבוצה הנ"ל (כלומר ש $m=1$). מהגדרת R נקבל כי $(1,n)R(m,n)$ ומכיוון ש (m,n) מינמאלי נקבל $(m,n)=(1,n)$ ולכן $m=1$ וסיימנו.

iii. האם יש איבר קטן ביותר? נמקו.

פתרון: אם היה איבר קטן ביותר אז הוא היה מינמאלי יחיד אבל אצלנו יש $(1,2),(1,3)$ שני איברים מינימאלים שונים

iv. האם R יחס סדר משווה/קווי/לינארי? נמקו

פתרון: מתקיים כי $(1,2),(1,3)$ אינן בר השוואה

כלומר $((1,2),(1,3))\notin R$ וגם $((1,3),(1,2))\notin R$

(ב) נגדיר יחס S על $P(\mathbb{N})$ על ידי הכלל: $XSY\iff(X\subseteq Y)\vee(Y\subseteq X)$. הוכיחו/הפריכו: S יחס שקילות.

פתרון: הפרכה: היחס אינו טרנזיטיבי. למשל

$$X=\{1\},Y=\{1,2\},Z=\{2\}$$

ומתקיים כי XSY וגם YSZ אבל $(X,Z)\notin S$.

3. (ניסוח פורמלי של השאלה) לכל $m,n\in\mathbb{R}$, נגדיר את הישר l עם שיפוע m שעובר דרך הנקודה $(0,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ להיות $l=\{(x,mx+n)\mid x\in\mathbb{R}\}$ (גם נדגיש לעיתים $l_{m,n}=\{(x,mx+n)\mid x\in\mathbb{R}\}$) תהא $I\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ונגדיר

- $L=\{l_{m,n}\mid(m,n)\in I\}$ קבוצת של ישרים.
- $D=\{(x,y)\mid\exists l\neq l'\in L:\ (x,y)\in l\cap l'\}$ - קבוצת כל נקודות החיתוך בין שני ישרים שונים מ L.
- $M=\{m\in\mathbb{R}\mid\exists n:\ l_{m,n}\in L\}$ - קבוצת כל השיפועים של הישרים מ L

(א) הוכיחו/הפריכו: אם M סופית אזי D בת מנייה

פתרון: הפרכה: ניקח

$$L=\{l_{0,n}\mid n\in\mathbb{R}\}\cup\{l_{1,n}\mid n\in\mathbb{R}\}$$

ואז $M=\{0,1\}$ סופית אבל $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מעוצמה א שאינה בת מניה. (למה $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$? כי עבור $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מתקיים $l_{0,b}\cap l_{1,b-a}=\{(a,b)\}$).

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $|M|=\aleph$ אז $|D|=\aleph$

פתרון: הפרכה: למשל נסתכל ב $L=\{l_{m,0}\mid m\in\mathbb{R}\}$ כל הישרים שעוברים ב $(0,0)$ (פרט לישר $x=0$) ולכן $|L|=\aleph$ ובנוסף

$$D=\{(0,0)\}$$

כי כל שני ישרים שונים מ L מקיימים שנקודת החיתוך היחידה בניהם היא $(0,0)$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $|M|=\aleph$ אזי $|L|=\aleph$

פתרון: הוכחה:נגדיר $N=\{n\in\mathbb{R}\mid\exists m\in\mathbb{R}:\ l_{m,n}\in L\}$ מתקיים כי $|N|\leq\aleph$ (כי N ת"ק של הממשיים) נבנה פונקציה $f:L\to M\times N$ ע"י

$$f(l_{m,n})=(m,n)$$

זוהי פונקציה חח"ע (חח"ע כי כל ישר נקבע ביחידות ע"י השיפוע שלו ונקודת החיתוך שלו עם ציר ה y) ולכן $|L|\leq|M\times N|=$ $|M|\cdot|N|\leq\aleph\cdot\aleph=\aleph$. בנוסף נגדיר $g:L\to M$ ע"י $g(l_{m,n})=m$ והיא פונקציה על לפי הגדרת M ולכן $\aleph=|M|\leq|L|$ ולכן לפי ק.ש.ב יש שיוויון $|L|=\aleph$

(ד) הוכיחו שאם L בת מנייה אזי גם D בת מנייה.
פתרון: הוכחה: נניח ש L בת מנייה צ"ל גם D בת מנייה. לפי הגדרת D מתקיים ש

$$D = \cup_{l \neq l' \in L} \left(l \cap l' \right)$$

כעת, האיחוד הוא איחוד בן מנייה. למה? כי מאחדים על פני הקבוצה $\{(l, l') \in L \times L \mid l \neq l'\}$ שהיא בת מניה כי היא תת קבוצה של $L \times L$ שהיא בת מניה ($|L \times L| = |L|\,|L| \leq \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$) בנוסף, לכל $l \neq l'$ שונים מתקיים כי $l \cap l'$ בן מניה שהרי $|l \cap l'| \leq 1$ (בין שני ישרים שונים יש נקודת חיתוך אחת לכל היותר). ולכן זהו D הוא איחוד בן מניה של בנות מניה ולכן הוא בן מניה כנדרש.

.4

(א) להוכיח את למת נקודת השבת (עבור פונקציות שומרות הכלה) - בהרצאה.

(ב) תהא A קבוצה ותהא פונקציה $\psi : P(A) \to P(A)$ כך ש $\psi(A) \neq A$ ולכל $X \subseteq A$ מתקיים מתקיים $A = X \cup \psi\left(\psi(X)\right)$.
הוכיחו שקיימות $X, Y \subseteq A$ כך ש $X \subseteq Y$ וגם $\psi(X) \not\subseteq \psi(Y)$.
פתרון: הוכחה: נב"ש שלא קיימות $X, Y \subseteq A$ כך ש $X \subseteq Y$ וגם $\psi(X) \not\subseteq \psi(Y)$ אזי לכל שתי קבוצות $X, Y \subseteq A$ כך ש $X \subseteq Y$ מתקיים $\psi(X) \subseteq \psi(Y)$. כלומר ψ שומרת הכלה ולכן לפי למת נקודת השבת, קיימת $X \subseteq A$ כך ש $\psi(X) = X$ ואז

$$A = X \cup \psi\left(\psi(X)\right) = X \cup \psi\left(X\right) = X \cup X = X$$

וקיבלנו ש $X = A$ אבל נתון ש $\psi(A) \neq A$ סתירה.

.5

(א) נגדיר סדרת קבוצות כך: $A_1 = \emptyset$ ולכן n טבעי $A_{n+1} = P(A_n) \backslash A_n$. הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים $\emptyset \in A_{2n}$.
פתרון: הוכחה באינדוקציה על n של הטענה לכל n טבעי מתקיים $\emptyset \in A_{2n}$

- בסיס$n = 1$: צ"ל $\emptyset \in A_2$. אכן, לפי הגדרה $A_2 = P(A_1) \backslash A_1 = P(A_1) = \{\emptyset\}$ ואכן $\emptyset \in A_2$
- צעד: נניח נכונות עבור n ונוכיח נכונות עבור $n + 1$. צ"ל $\emptyset \in A_{2(n+1)}$. לפי הנחת האינדוקציה $\emptyset \in A_{2n}$ ובנוסף $\emptyset \in P(A_{2n})$ (כי הקבוצה הריקה שייכת לכל קבוצת חזקה) ולכן $\emptyset \notin P(A_{2n}) \backslash A_{2n} = A_{2n+1}$ ואז, לפי הגדרה

$$A_{2(n+1)} = A_{2n+2} = P(A_{2n+1}) \backslash A_{2n+1}$$

ובנוסף $\emptyset \in P(A_{2n+1})$ (כי הקבוצה הריקה שייכת לכל קבוצת חזקה) ולכן $\emptyset \in A_{2n+2}$ כנדרש.

(ב) שאלת בגרפים - אין השנה.