לינארית 1 (88112), סמסטר חורף תשעח, מבחן דמה-פתרון

חלק א

1. קבעו והוכיחו האם קיימת ה"ל בסעיפים הבאים:

(א) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $\mathrm{Im}T=\ker T$.

פתרון: לא קיימת: נב"ש שקיימת אזי לפי משפט הדרגה

$$3=\dim\mathbb{R}^3=\dim\mathrm{Im}T+\dim\ker T=2\dim\ker T$$

ולכן

$$\dim\ker T=1.5$$

אבל $\dim\ker T$ שלם. סתירה.

(ב) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ כך ש $\mathrm{Im}T=\ker T$.

פתרון: קיימת: למשל T המוגדרת ככפל במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

אזי

$$\mathrm{Im}T=C(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

וגם

$$\ker T=N(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(ג) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $T\neq 0$ וגם $T^3=-T$.

פתרון: קיימת: למשל T המוגדרת ככפל במטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אזי T^3 מוגדרת עי כפל במטריצה

$$A^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכיוון ש $A^3=-A$ נקבל ש $T^3=-T$.

(ד) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $T\neq 0, I$ וגם לכל v מתקיים $Tv=0$ או $Tv=v$.

פתרון: לא קיימת: נב"ש שקיימת אזי

- אם לכל v מתקיים $Tv = v$ אז $T = I$ והגענו לסתירה.
- אם לכל v מתקיים $Tv = 0$ אז $T = 0$ והגענו לסתירה.
- אחרת, קיים $v_1 \neq 0$ ו $v_2 \neq 0$ כך ש $Tv_1 = v_1$ וגם $Tv_2 = v_2$. כיוון ש $v_1 \neq 0$ ו $v_2 \neq 0$ נקבל ש $v_1 + v_2 \neq v_1, v_2$ אבל

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = v_1$$

אבל $v_1 \neq 0, v_1 + v_2$ והגענו לסתירה.

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $R(A) \subseteq C(A)$. הוכיחו/הפריכו: A סימטרית.
פתרון: הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן $R(A) = C(A) = \mathbb{R}^2$ אבל היא לא סימטרית.

חלק ב

3. נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & t \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה ממשית.

(א) מצאו לאילו ערכי a, t המטריצה A הפיכה.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י חישוב הדטרמיננטה:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & a & t \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -a^2 + at - t + 1$$

ואז עבור $a = 1$ נקבל כי $\left|\begin{pmatrix} 1 & a & t \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$ ולכן לא הפיכה לכל ערך t.

עבור $a \neq 1$ נקבל כי $\left|\begin{pmatrix} 1 & a & t \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -a^2 + (a-1)t + 1$ ולכן זה שווה לאפס $\left(-a^2 + (a-1)t + 1 = 0\right)$ אמ"מ

$$t = \frac{-1 + a^2}{a - 1} = a + 1$$

לסיכום: A הפיכה אמ"מ $a \neq 1$ ו $t \neq a + 1$.

(ב) מצאו לאילו ערכי a, t מתקיים $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin C(A)$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & t & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ובדיקה מתי אין פתרון (כלומר, מתי יש שורת סתירה).

(ג) הוכיחו שלכל ערכי a, t מתקיים $C(A) \cap R(A) \neq \{0\}$.
פתרון: נחלק למקרים:

- אם $a \neq 1$ ו $t \neq a+1$ אז A הפיכה ו $C(A)=R(A)=\mathbb{R}^3$ ובפרט $C(A)\cap R(A)=\mathbb{R}^3$.
- אם $a=1$ נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ומתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)\cap R(A)$$

- אחרת $t=a+1$ ונקבל $\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. רואים ששתי השורות האחרונות בת"ל ולכן $\dim R(A) \geq 2$. רואים ששתי העמודות האחרונות בת"ל ולכן $\dim C(A) \geq 2$ ולכן , לפי משפט המימדים:

$$\dim C(A)\cap R(A) = \dim C(A) + \dim R(A) - \dim\left(C(A)+R(A)\right) \geq 2+2-3=1$$

בפרט

$$C(A)\cap R(A) \neq \{0\}$$

4. נסמן $V=\mathbb{R}^3$ ותהא $T:V\to V$ ה"ל. נגדיר

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

שני בסיסים של V. נתון ש $[T]_C^B=I$

(א) מצאו בסיס ומימד של $\mathrm{Im}T$.
פתרון: המטריצה $[T]_C^B=I$ ולכן הפיכה. מכאן ש T הפיכה ובפרט על ולכן

$$\mathrm{Im}T=\mathbb{R}^3$$

והמימד 3 ו $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס אפשרי למרחב.

(ב) מצאו בסיס ומימד של $\ker T$.
פתרון: המטריצה $[T]_C^B=I$ ולכן הפיכה. מכאן ש T הפיכה ובפרט חח"ע ולכן

$$\ker T=\{0\}$$

ו $\emptyset$ היא בסיס למרחב זה ומימדו 0.

(ג) מצאו נוסחה מפורשת ל T.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות מכך שיש לנו מטריצה מייצת של T עם בסיסים נתונים.

(ד) הוכיחו כי T הפיכה ומצאו נוסחה מפורשת ל T^{-1}.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י האבחנה שהמטריצה $[T]_C^B=I$ ולכן הפיכה. מכאן ש T הפיכה ושימוש במשפט

$$[T^{-1}]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}=I^{-1}=I$$

ויש לנו מטריצה מייצת של T^{-1} עם בסיסים נתונים שממנה ניתן למצוא נוסחה מפורשת לT^{-1}.

5. נסמן $V=\mathbb{R}_2[x]$ ונגדיר

$$W=\{p(x)\in V\,|\,p(x)=x\,(ax+b)+2a\}$$
$$U=\{p(x)\in V\,|\,p(1)=0\}$$

מצאו בסיסים ומימדים ל 4 המרחבים $U,W,U\cap W,U+W$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן לעבוד עם הבסיס הסטנדרטי S של V ולהציג את המרחבים

$$[W]_S=\left\{\begin{pmatrix}2a\\ b\\ a\end{pmatrix}\,|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$
$$[U]_S=\left\{\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\,|\,a+b+c=0\right\}$$

ולהמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת.