

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית (88-201)
 שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
 סמסטר א', מועד ב': (20.09.15)
יש לנמק את כל התשובות.

משך הבחינה: שלוש שעות. שאלה 1 שווה 20 נקודות. שאלות 2,3,4,5 שוות 22 נקודות כל אחת.

1. בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$, תהי $f(x, y) = \frac{2}{y}$. התבונן במטריקה $f(x, y)^2 \delta_{ij}$.

א. חשב את המקדם Γ_{11}^1 של המטריקה.

ב. חשב את העקמומיות של גאוס של המטריקה כפונקציה $K = K(x, y)$.

2. הבעיה הזו עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.

א. הגדר מושג של פרמטר במהירות יחידה של עקומה.

ב. התבונן בעקומה $\alpha(t) = (8 \cos t, 10 - 10 \sin t, -6 \cos t)$. מצא פרמטר

במהירות יחידה $s = s(t)$ של העקומה.

ג. חשב את העקמומיות של העקומה בחלק ב'.

3. הבעיה הזו עוסקת במשטחים במרחב אוקלידי. נניח ש $g_{ij} = L_{ij} = 0$ כאשר $i \neq j$.

א. הגדר מושג של עקמומיות ראשיות k_1 ו- k_2 .

ב. בטא את העתקת Weingarten בתור מטריצה לפי בסיס מתאים.

ג. בטא את היחס k_1/k_2 כפונקציה של מקדמים של תבניות יסודיות ראשונה ושניה.

ד. חשב את היחס k_1/k_2 במקרה של משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של

$$\text{פרבולה } x = z^2 + \frac{1}{4} \text{ מסביב לציר } z.$$

4. הבעיה הזו עוסקת במשטחים.

א. בטא את Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij} .

ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^\ell x_\ell + L_{ij} n)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j ו- k .

ג. הסבר את היחס בין L_{ij}^k ו- L_{ij} .

ד. כתוב את הביטוי $L_{i[j} L_{l]}$ באמצעות של מקדמי המטריקה ונגזרותיה.

5. הביטויים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein. לפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:

א. $\langle x_{ij}, n_k \rangle (\delta_m^k) g^{m\ell}$

ב. $\langle x_j, x_{pq} \rangle (\delta_r^j)$

ג. $\langle x_{pqr}, x_m \rangle$

ד. $\delta_b^a g_{ca} g^{bd} \delta_d^c$

בהצלחה!