תרגול 9-אושרית

משפט ההגדרה,הפיכות,איזומורפיזם, גרעין ותמונה

תרגיל:

יהיו - $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$w_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $w_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

האם קיימת הע"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $Tv_i=w_i$ לכל i:

פתרון!

ראשית- נבדוק האם v_1,v_2,v_3 בסיס, אם כן- קיימת הע"ל יחידה לפי משפט ההגדרה

אם לא- צריך לבדוק ידנית.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&4\\3&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[(\text{שמ"ע})]{\text{דירוג}}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_3=t$

$$\begin{cases}\alpha_2-2t=0\\ \alpha_2=2t\\ \alpha_1+3t=0\\ \alpha_1=-3t\end{cases}$$

$$\in\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\quad\in\quad\left\{\begin{pmatrix}-3t\\2t\\t\end{pmatrix}\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}\quad\in$$

משפט מערך הרצאה 8:

$$-3v_1+2v_2-v_3=0 \Rightarrow v_3=3v_1-2v_2$$

$$T(v_3)=w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

אמת - נבדוק בגלל T הזה אגף 1 -

$$T(3v_1-2v_2)=3Tv_1-2Tv_2=3\cdot w_1-2w_2=$$

אגף 2 -

$$=3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

מתקיים ולכן - ניתן לוותר על הדרישה של $Tv_3=w_3$

ונשלים את $\{v_1,v_2\}$ לבסיס ונגדיר הכל בהתאם

איך משלימים לבסיס?

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

ולכן - נשלים עם $(0,0,1)$

$\Leftarrow$ $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$

תרגיל המשך: אם משאירים את כל נתוני השאלה הקודמים ומחליפים את $w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

אזי -

$$\left.\begin{aligned} T(w_3) &= T(3v_1 - 2v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\neq \\ T(w_3) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

סתירה

ולכן - <u>לא</u> הטל

הג: תהא $T:V\to W$ ה"ל.

1) הגרעין של T-

2) התמונה של T-

3) הדרגה של T

$$\ker T=\{v\in V \mid T(v)=0\}\leq V$$

$$\operatorname{Im} T=\{T(v)\mid v\in V\}\leq W$$

$$\operatorname{rank}(T)=\dim(\operatorname{Im} T)$$

דוג׳:

יהי $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$, ותהי - $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונסתכל על ההעתקה $L_A : V \to W$

המוגדרת כך - $L_A(v) = A \cdot v$ לכל -

1) נמצא את $\ker(L_A)$

$$\ker(L_A) \underset{\text{הג' } \ker}{=} \{v \in V \mid L_A(v) = 0\} \underset{\text{הג' } L_A}{=} \{v \in V \mid A \cdot v = 0\} \underset{\text{לפי הג' מרחב האפס}}{=} N(A)$$

2) נמצא את $\mathrm{Im}(L_A)$

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{Av \mid v \in V\} = C(A)$$

3) $\mathrm{rank}(L_A) = \mathrm{rank}(A)$

משפט: תהא- $T:V\to W$ ה"ל, אזי- T חח"ע $\longleftrightarrow$ $Ker(T)=\{0\}$

משפט: תהא $T:V\to W$ ה"ל ויהיו $\{v_1,\dots,v_n\}$ וקטורים ב-V אזי-

1. אם $\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ בת"ל אזי- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל
2. אם T חח"ע, אזי- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל $\longleftarrow$ $\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ בת"ל.

הוכחה:

1. נתבונן בצירוף לינארי מתאפס של $\{v_1,\dots,v_n\}$ $\quad \alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$
נפעיל T על 2 האגפים ונקבל- $T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)=\alpha_1Tv_1+\dots+\alpha_nTv_n=T0=0$
אבל $\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ בת"ל ולכן- $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$

2. נתבונן בצירוף לינארי מתאפס של $Tv_1,\dots,Tv_n$ $\quad \alpha_1Tv_1+\dots+\alpha_nTv_n=0$
$$\Downarrow$$
$$T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)=0$$
T חח"ע ולכן- $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$ ולכן- $v_1,\dots,v_n$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$

האם קיימת הע"ל חח"ע מוי לW

תרגיל: $W=\mathbb{R}^2$ $V=\mathbb{R}_2[x]$

פתרון: נניח - כי T חח"ע, אזי טוען ש- $1, x, x^2$ בת"ל לפי תרגיל לעיל גם $T(1), T(x), T(x^2)$ בת"ל
אבל - $T(1), T(x), T(x^2)$ ב-$\mathbb{R}^2$ שהוא מרחב ממימד 2 ולכן יש 3 וקטורים בו - ת"ל.
וסתירה!

תרגיל: $W=\mathbb{R}^4$, $V=\mathbb{R}^3$ האם קיימת $T: V\to W$ על?

פתרון: נניח - כי T על - אזי יש מקור ל- e_1,e_2,e_3,e_4. (נסמן את המקורות ב- v_i כלומר $Tv_i=e_i$
e_1,e_2,e_3,e_4 בת"ל ולכן - גם v_1,v_2,v_3,v_4 בת"ל אבל - 4 הוקטורים שייכים למרחב ממימד 3 ולכן - ת"ל
4 וקטורים במרחב בו ההנחה - ת"ל.

תרגיל: יהיו $W=\mathbb{R}^2$, $V=\mathbb{R}^3$ והמישור

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x+y+z=0\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\leq V$$

מצאו העתקה $T:V\to W$ כך ש- $\ker T=U$ וגם $\operatorname{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון: נעזר במשפט ההג' של העתקות ליניאריות.

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\underline{1}&-1\end{pmatrix}$$

שלב א': נשלים את U לבסיס.

ע"י את הווקטור $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

שלב ב':

נגדיר

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

משפט הדרגה: תהא- $T:V\to W$ הל"ל. אזי- $\dim \operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim V$

תרגיל: נסתכל על הל"ל $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$ המוגדרת- $T(A)=tr(A)$ מצאו בסיס לגרעין ההעתקה.

פתרון: T היא על, כי לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים מקור מטריצה $\begin{pmatrix}a&0&\cdots&0\\ &\ddots&&\\0&&&0\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ~~[illegible]~~

כעת- ניעזר במשפט הדרגה

$$\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)=n^2$$

T על ולכן- $\dim(\operatorname{Im}T)=\underbrace{\dim\mathbb{F}}_{1}$ $\Leftarrow$ $\dim(\ker T)=n^2-1$

כעת לפי השלישי חינם מספיק למצוא n^2-1 מטריצות בת"ל שעוברות לגרעין ואלו הן בסיס.

למשל - המטריצות:

$$\{\underbrace{E_{ij}\mid i\neq j}_{n^2-n}\}\cup\{\underbrace{E_{11}-E_{ii}\mid 2\le i\le n}_{n-1}\}$$

$\leftarrow$ [illegible] איברי המטריצה

מורכבים רק מאיברי האלכסון

לכן יש n^2-1 איברים בגרעין של מטריצות בת"ל ולכן - בס"ס.

תרגיל: $T:V\to V$ הע"ל.

הוכח שהתנאים שקולים:

1. $kerT=kerT^2$
2. $ImT^2=ImT$
3. $V=kerT\oplus ImT$

פתרון: לפי משפט המימד מתקיים $dimkerT^2+dimImT^2=dimV=dimkerT+dimImT$

$1\leftarrow 2$: $kerT=kerT^2 \Leftarrow dimkerT=dimkerT^2=m \Leftarrow dimImT=dimImT^2=dimV-m$

ומצד שני ברור (הראינו) כי- $ImT^2\subseteq ImT$

$\Leftarrow$ לפי הכלה חד כיוונית ושוויון מימדים נקבל כי $\boxed{ImT=ImT^2}$

$2\leftarrow 1$: $ImT^2=ImT \Leftarrow dimImT=dimImT^2=t \Leftarrow dimkerT=dimkerT^2=dimV-t$

ומצד שני ברור (הראינו) כי- $kerT\subseteq kerT^2 \Leftarrow \boxed{kerT=kerT^2}$

לפי הכלה חד כיוונית ושוויון מימדים.

$1\leftarrow 3$: נרצה להוכיח כי $V=kerT\oplus ImT$

ראשית- נראה כי החיתוך הוא וקטור האפס. יהי $v\in kerT\cap ImT$ אזי- $Tv=0$ (כי v בגרעין) וקיים $w\in V$

כך ש- $Tw=v$ ובנוסף אם נפעיל T על 2 האגפים.

$T^2w=Tv=0 \Leftarrow w\in \underbrace{kerT^2}_{kerT} \Leftarrow v=Tw=0.$

סעיף: לפי משפט המימדים + משפט הדרגה

$$\dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \underbrace{\dim\ker T + \dim \operatorname{Im} T}_{\dim V \text{ לפי משפט הדרגה}} - \underbrace{\dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T)}_{0 \text{ לפי מה שהוכחנו למעלה}}$$

וכן ברור כי $\ker T + \operatorname{Im} T \subseteq V$

$\Leftarrow$ לכן הכלה חד כיוונית ושוויון מימדים נקבל - $\ker T + \operatorname{Im} T = V$

3⇐1: הוכחנו כי - $\ker T \subseteq \ker T^2$ ולכן מ"ל כי - $\ker T^2 \subseteq \ker T$. יהי $v \in \ker T^2$ אזי - מצד 1

$T^2 v = 0 \Leftarrow T(Tv) = 0 \Leftarrow Tv \in \ker T$ וגם - $Tv \in \operatorname{Im} T$ אבל - $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$

$\Leftarrow Tv = 0 \Leftarrow v \in \ker T$.

הפיכות ואיזומורפיזם:

הגדרה: הע"ל $T:V\to W$ הפיכה אם יש הע"ל $S:W\to V$ כך ש- $T\circ S=Id_W$, $S\circ T=Id_V$,במקרה ז

מסמנים - $S=T^{-1}$.

משפט: T הפיכה $\iff$ T חח"ע ועל.

תכונות:

1. אם T הפיכה אז גם ההופכית ומתקיים $(T^{-1})^{-1}=T$.
2. יהיו $T,S:V\to V$ שתי הע"ל אז T,S הפיכות $\iff$ ST הפיכה ובמקרה זה $(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$
3. אם הע"ל $L_A(v)=A\cdot v$ הפיכה אז ההופכית היא $L_{A^{-1}}$.

איזומורפיזם:

הגד: ה"ל $T: V \to W$ תיקרא- 1) **מונומורפיזם** אם T חח"ע.

2) **אפימורפיזם** אם T על.

3) **איזו** אם T חח"ע ועל (הפיכה) במקרה זה נאמר ש- $V \cong W$.

הערה: $\cong$ מתנהג כמו יחס שקילות כלומר-

1) $\forall V: \quad V \cong V$

2) $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$

3) $V_1 \cong V_2 \wedge V_2 \cong V_3 \wedge V_1 \cong V_3$

~~[illegible]~~ נתון: $T:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת ע"י $T(A)=A^t$ צריך להוכיח שהפיכה.

פתרון: (1 נחשב את $\ker(T)$ ←

$T(A)=0 \leftrightarrow A^t=0 \xrightarrow[\text{תכונה 2 של שחלוף}]{} (A^t)^t=0^t \Leftrightarrow \boxed{A=0}$

$\ker T=\{A\in\mathbb{F}^{m\times n} \mid T(A)=0\}=\{0\}$ ⇐

⇐ T חח"ע.

(2 $\underbrace{\dim\ker T}_{0}+\dim\operatorname{Im}T=m\cdot n$ לפי משפט המימדים

⇐ $\dim\operatorname{Im}T=\dim\mathbb{F}^{n\times m}$

וגם- בנוסף $\operatorname{Im}T\subseteq\mathbb{F}^{n\times m}$

⇐ $\operatorname{Im}T=\mathbb{F}^{n\times m}$

⇐ T על

⇐ T חח"ע ועל ⇐ $\boxed{T\text{ הפיכה}}$

סוף הרצאה 17

משפט: יהיו V,W מ"ו נ"ס - $\dim V = \dim W \iff V \cong W$

הוכחה:

($\Rightarrow$) נבחר בסיס B עבור V. מהמשפט הקודם - קיימת $T: V \to W$ הפיכה. לכן - $|B| = |T(B)|$ ובנוסף, $T(B)$ בסיס ל- W. זה אומר שהמימדים שווים.

($\Leftarrow$) נבחר $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, $B'=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיסים. לפי משפט ההגדרה נגדיר $T: V \to W$ ע"י $Tv_i = w_i$

נראה כי T הינה הפיכה, כלומר המרחבים איזומורפיים.

$\ker T$: $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\} = \{v \in V : Tv = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_n\} = \{v \in V : 0 \cdot Tv_1 + \dots + 0 \cdot Tv_n = 0\}$

$= T(0v_1 + \dots + 0v_n) = 0 \Rightarrow \{0\}$

$\operatorname{Im}T$: $\operatorname{Im}T \subseteq W$ מגדר

לפי משפט הדרגה

$$\underbrace{\dim\ker T}_{0} + \dim \operatorname{Im}T = \dim V = \dim W$$

$\Leftarrow \dim \operatorname{Im}T = \dim W$

$\operatorname{Im}T = W \xleftarrow{\text{לפי הכלה}}$ חד כיוונית ושוויון ממדים

מש"ל

בהצלחה!!!