

תרגיל בית 5 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ה

שאלות המסומנות עם (-) הן יותר קלות, ושאלות המסומנות עם (+) הן יותר קשות.

שאלה 1. תזכורת לסדרת פיבונצ'י: ערכי ההתחלה הם $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה היא $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. הוכיחו בעזרת אינדוקציה שלכל מספר טבעי n , האיבר F_{3n} בסדרת פיבונצ'י הוא זוגי.

שאלה 2. מהו מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44$ כאשר x_i מספרים שלמים זוגיים אי-שליליים?

שאלה 3. מהו מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 44$ כאשר x_i מספרים שלמים אי זוגיים חיוביים?

שאלה 4. מצאו את מספר הסדרות $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ של מספרים שלמים המקיימות

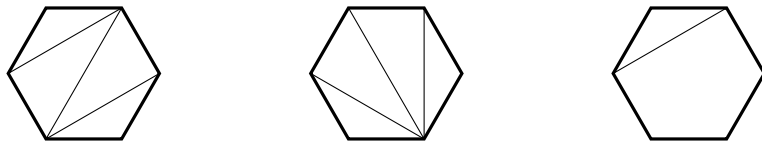
$$50 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{10} \geq 0$$

מה יהיה מספר הסדרות אם בנוסף נדרוש כי a_i הם מספרים שלמים זוגיים?

שאלה 5. נתונות $2n$ נקודות שונות על היקף מעגל. הוכיחו כי מספר קטלן C_n שווה למספר הדרכים לחלק את הנקודות ל- n זוגות כך שהמיתרים המחברים את הנקודות בכל זוג לא נחתכים.

נסו להוכיח זאת בשתי דרכים: על ידי מציאת נוסחת נסיגה ועל ידי מציאת התאמה חח"ע ועל למחרוזות מאוזנות של סוגריים.

שאלה 6. יהי מצולע P בן n צלעות. אלכסון של מצולע P הוא קו המחבר שני קודקודים של P ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של P . שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמה, אם P הוא משושה משוכלל:



במשושה בצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, במשושה במרכז מסומן שילוש ובמשושה בצד שמאל מסומן שילוש אחר.

1. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן $n \geq 3$ צלעות ניתן לשילוש ושילוש בשימוש $n - 3$ אלכסונים. מותר להניח שכל אלכסון במצולע נמצא בחלקו הפנימי של המצולע. (ניתן להוכיח גם שכל מצולע ניתן לשילוש).

2. (+) יהי T_n מספר השילוחים של מצולע משוכלל בן n צלעות. מצאו נוסחת נסיגה עבור T_n וממנה הסיקו נוסחה מופרשת עבור T_n .

שאלה 7 (שאלת אתגר הטוטו). (+) כל שבוע מתפרסמת רשימה של משחקי כדורגל אשר משתתפים בטופס הטוטו בשבוע הזה. המשתתפים בטוטו צריכים לנחש את תוצאת המשחקים. לא לדאוג, מדובר בשאלות מתמטיות ואין שום צורך בידע בכדורגל כדי לפתור אותן. בטופס סטנדרטי יש 16 שורות עבור 16 משחקי כדורגל. במילוי הטופס יש למלא בכל שורה אחת משלוש אפשרויות: 1 (ניצחון קבוצת הבית), X (תיקו) או 2 (ניצחון קבוצת החוץ). הפרס הראשון מוענק למי שניחש נכונה את תוצאות כל המשחקים. פרס משנה מוענק למי שניחש נכונה 12-15 תוצאות נכונות.

המטרה העיקרית שלכם היא למצוא חסמים טובים למספר הטפסים שיש למלא כדי להבטיח זכייה כלשהי (פרס ראשון או פרס משנה). נתחיל בכמה סעיפים יותר קלים, ואחר כך יותר קשים. לעיתים נשתמש בטפסים לא סטנדרטיים שבהם יש פחות משחקים.

1. מהו המספר הקטן ביותר של טפסים סטנדרטיים שצריך למלא כדי להבטיח לפחות תוצאה אחת נכונה?

2. מהו המספר הקטן ביותר של טפסים סטנדרטיים שצריך למלא כדי להבטיח זכייה בפרס הראשון?

3. מצאו חסם תחתון למספר הטפסים עם שלוש שורות שיבטיח לפחות 2 תוצאות נכונות. רמז: מספר חד-ספרתי לא גדול.

4. מצאו חסם תחתון למספר הטפסים עם ארבע שורות שיבטיח לפחות 3 תוצאות נכונות.

5. העזרו בסעיף הקודם כדי למצוא חסם תחתון למספר הטפסים שיבטיח זכייה בפרס כלשהו בטופס סטנדרטי. כלומר מצאו מספר N של טפסים שאם נקנה פחות ממנו יתכן ובאף אחד מן הטפסים לא תהינה 12 (או יותר) תוצאות נכונות. רמז: נסו לחשוב מה קורה אם התוצאות שניחשנו בטופס אחד "מאוד שונות" מהתוצאות שניחשנו בטופס אחר.

6. מצאו חסם עליון למספר הטפסים עם שלוש שורות שיבטיח לפחות 2 תוצאות נכונות. רמז: מספר חד-ספרתי לא גדול.

7. מצאו חסם עליון למספר הטפסים עם ארבע שורות שיבטיח לפחות 3 תוצאות נכונות.

8. העזרו בסעיף הקודם כדי למצוא חסם עליון למספר הטפסים שיבטיח זכייה בפרס כלשהו בטופס סטנדרטי. כלומר מצאו מספר N של טפסים כך שמובטח שבאחד מן הטפסים יש 12 או יותר תוצאות נכונות.

בהצלחה!