הגדרה

הנקודה z_0 נקראת נקודה סינגולרית מבודדת אם f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, אבל לא אנליטית בz_0 עצמה.

דוגמאות

4. $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. f אנליטית ב$\mathbb{C}$ פרט לנקודות $\frac{1}{n\pi}, n\in\mathbb{Z}$ ו0.

הנקודות $\frac{1}{n\pi}$ הן סינגולריות מבודדות, אבל 0 אינה סינגולרית מבודדת כי אין ל0 סביבה מנוקבת שפנויה מנקודות סינגולריות $\frac{1}{n\pi}$.

5. $f(z)=\mathrm{Log}z$. f סינגולרית בכל הקרן השמאלית של ציר הx, אבל נקודות אלה אינן מבודדות.

הגדרה

נוהגים להבחין בין שלושה סוגי נקודות סינגולריות מבודדות. הסוג הראשון הוא "נקודת סינגולריות סליקה". לפי הגדרה זאת נקודה $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, וקיים מספר $L\in\mathbb{C}$ כך שאם רק נגדיר $f(z_0)=L$ אז f תהיה אנליטית גם בz_0.

משפט 1

נניח ש$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. z_0 נקודה סינגולרית סליקה עבור f
2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ קיים ושווה $L\in\mathbb{C}$(ולא ∞!)
3. $f(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0

הוכחה

$(1)\Leftarrow(2)$ (1) אומר שקיים מספר $L\in\mathbb{C}$ כך שאם נגדיר $f(z_0)=L$ f תהיה אנליטית בz_0. בפרט היא תהיה רציפה בz_0. לכן לפי הגדרה $L=f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.
בפרט $\lim\limits_{z\to z_0} f(Z)$ קיים. לכן $(1)\Leftarrow(3)$.

$(2)\Leftarrow(3)$ נתון $\lim\limits_{z\to z_0}=L\in\mathbb{C}$. ניקח $\varepsilon=1$(למשל). לפי הגדרה קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|z-z_0|<\delta$ אז מתקיים $|f(z)-L|<1$. ז.א. בסביבה מנוקבת של z_0, $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$,

$$|f(z)|-|L|\le|f(z)-L|<1$$

ז.א. $|f(z)| < |L| + 1$, ומצאנו שf חסומה בסביבה מנוקבת של z_0. ז.א. $(2) \Leftarrow (3)$.

$(3) \Leftarrow (1)$ הנתון אומר שקיימת סביבה מנוקבת S של z_0 כך שלכל $z \in S$, $|f(z)| \leq M < \infty$.

לכל $z \in S$ נגדיר $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ ונגדיר $g(z_0) = 0$.

טענה 1: g רציפה בz_0.

הוכחה: $\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(z - z_0)^2}_{\to 0} \underbrace{f(z)}_{\text{bounded}} = 0 = g(z_0)$, לכן g רציפה בz_0.

טענה 2: g גזירה בz_0 ו$g'(z_0) = 0$.

הוכחה: לפי הגדרה

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{(z - z_0)} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

הוכחנו ש$g'(z_0)$ קווים ושווה 0. כזכור,

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & z \in S \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

מהנוסחה הראשונה נובע מייד שg רנליטית בS, כי היא מכפלה של שתי פונקציות אנליטיות. בטענה 2 הוכחנו ש$g'(z_0)$ קיים. לכן g אנליטית ב$S \cup \{z_0\}$ שזו סביבה שלימה של z_0.

יתר על כן, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, לכן קיים לg אפס מסדר $n \geq 2$ בz_0. קיים פירוק $g(z) = (z - z_0)^n h(z)$ כאשר h אנליטית בסביבהת z_0 ו$h(z_0) \neq 0$.

נגדיר $k(z) = (z - z_0)^{\overbrace{n-2}^{\geq 0}} h(z)$. אז גם k אנליטית בסביבת z_0, ומתקיים

$$g(z) = (z - z_0)^2 k(z) \qquad z \in S \cup \{z_0\}$$

כעת לכל $z \in S$, $(z - z_0)^2 f(z) = g(z) = (z - z_0)^2 k(z)$. ב$S$, $z - z_0 \neq 0$ ונובע ש$k(z) = f(z)$. אבל k אנליטית גם בz_0, לכן אם רק נגדיר $f(z_0) = k(z_0)$ סילקנו את הסינגולריות של f בz_0.

■

דוגמאות

דוגמה 1. לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ נגדיר $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. נראה שלf קיימת סינגולריות סליקה באפס.

הוכחה א: לפי תנאי (2) של משפט 1 מספיק להוכיח שקיים גבול $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$. פורמלית הגבול הוא $\dfrac{0}{0}$, אבל במצב זה של "$\dfrac{0}{0}$" מותר להשתמש בכלל לופיטל גם לגבי פונקציות אנליטיות, ולכן

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{(\sin z)'}{z'} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = 1$$

וכיוון שקיים גבול, הסינגולריות סליקה..

הוכחה ב: ידוע לנו שלכל $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

לפי זה, אם $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

אגף ימין הוא טור חזקות שמתכנס לכל $\mathbb{C}$. לכן הוא פונקציה שלימה, ופונקציה זו מתלכדת עם $\dfrac{\sin z}{z}$ בכל נקודה פרט לאפס. מכאן שאם רק נגדיר $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$ סילקנו את הסינגולריות.

דוגמה 2. (הכללה של דוגמה 1)

נניח שהפונציות g וh אנליטיות בסביבת z_0 ונניח שלשתיהן יש אפס מאותו סדר n ב$z = z_0$...

הוכחה: כיוון של$g(z)$ יש אפס מסדר n בz_0, $g(z) = (z-z_0)^n g_1(z)$ כאשר g_1 אנליטית בסביבה שלימה של z_0 ו$g_1(z_0) \neq 0$. כמו כן $h(z) = (z-z_0)^n h_1(z)$ כאשר $h_1(z)$ אנליטית בסביבה שלימה של z_0 ו$h(z_0) \neq 0$. מכאן שבסביבה מנוקבת של z_0

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^n g_1(z)}{(z-z_0)^n h_1(z)} = \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$$

כיוון ש$h_1(z_0) \neq 0$ הפונקציה באגף ימין אנליטית בסביבה שלימה של z_0 והיא "מסלקת" את הסינוגולרית של f בz_0.

הגדרה

הסוג השני של סינגולריות מבודדת נקרא "קוטב". זה קורה כאשר f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ו-$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

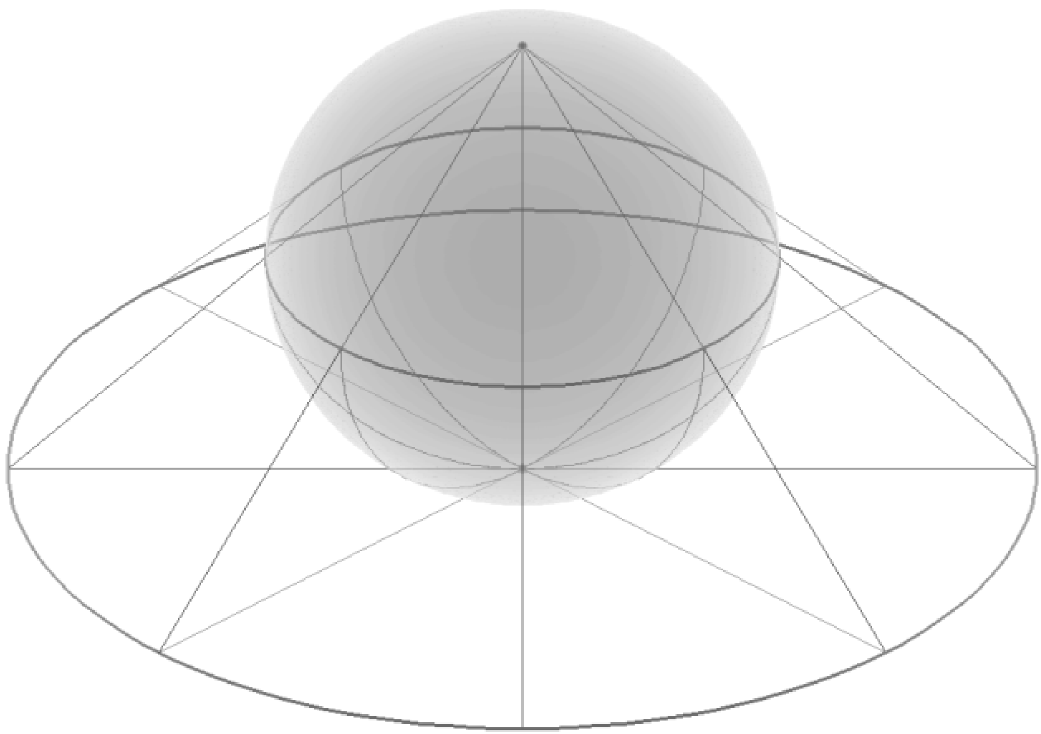
הערה

בזה מוסכם שב-$\mathbb{C}$ יש רק ∞ אחד(ולא $\pm\infty$ או $i\infty$ וכו') ומוסכם ש

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)|=+\infty$$

שקול: $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}=0$

הסבר מוחשי לדבר נתון ע"י "הכדור של רימן":



S^2=פני הכדור=ספירה.

מניחים כדור על המישור המרוכב באופן כזה שהקוטב הדרומי מונח על 0. לכל נקודה ב-S^2 פרט לקוטב הצפוני נתאים נקודה יחידה במישור עי "היטל סטריוגרפי". ז.א. בונים קו ישר מהקוטב הצפוני אל אותה נקודה ב-S^2. קו זה פוגש את המישור $\mathbb{C}$ בנקודה אחת ובזה נוצרת התאמה בין נקודות ב-S^2 לנקודות ב-$\mathbb{C}$.

נשים לב שכאשר נקודה z במישור שואפת ל-∞ בכיוון כלשהו, תמונתה ב-S^2 מתקרבת לקוטב הצפוני. בזה הצדקנו את הרעיון שב-$\mathbb{C}$ יש ∞ אחד, והצדקנו את השם "קוטב".

תזכורת

אם $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, אומרים שיש לה קוטב בz_0 אם $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

שקול: $$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$$

שקול: $$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$$

משפט 2

תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) קיים ל$f(z)$ קוטב בz_0.

(ב) קיים ל$f(z)$ פירוק $z\in S$, $f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)$ כאשר $g(z)$ אנליטית ב$S\cup\{z_0\}$(ז.א. בסביבה שלימה של z_0) ו$g(z_0)$.

כאשר $n\in\mathbb{N}$ הפירוק יחיד וn נקרא "סדר הקוטב של f בz_0".

הוכחה

(ב)$\Leftarrow$(א) לפי (ב) יש פירוק

$$f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z) \qquad z\in S$$

וגם נתון ש$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=g(z_0)\neq 0$ לכן

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^n}}_{\to\infty}\underbrace{g(z)}_{\to g(z_0)\neq 0}=\infty$$

(א)$\Leftarrow$(ב) נתון ב(א) שקיים לf קוטב בz_0. ז.א. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. בפרט יש סביבה מנוקבת $S_1\subset S$ של z_0 שבה $f(z)\neq 0$. עבור $z\in S_1$ נגדיר $h(z)=\frac{1}{f(z)}$. h אנליטית בS_1 כי $f(z)\neq 0$ שם. יתר על כן

$$\lim_{z\to z_0} h(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$$

לכן אם רק נגדיר

$$h(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)} & z\in S_1\\ 0 & z=z_0\end{cases}$$

היא תהיה אנליטית ב$S_1 \cup \{z_0\}$, וכיוון ש$h(z_0)=0$ יש פירוק יחיד

$$h(z)=(z-z_0)^n k(z)$$

כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו$k(z)$ אנליטית בסביבה שלימה של z_0, ו$k(z_0) \neq 0$.
לכן עבור כל $z \in S_1$

$$f(z)=\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\frac{1}{k(z)}$$

וכיוון ש$k(z_0) \neq 0$ הפונקציה $\frac{1}{k(z)}$ אנליטית בסביבת z_0 וקיבלנו את הפירוק

$$f(z)=(z-z_0)^{-n} g(z) \qquad zjiS_!$$

יחידות הפירוק של f נוקבעת מיחידות הפירוק של h.

$\blacksquare$

הגדרה

תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0. אם הסינגולריות של f בz_0 לא סליקה וגם לא קוטב קוראים לה סינגולריות עיקרית.

שקול: $\lim_{z\to z_0} f(z)$ אינו קיים לא כמספר סופי ולא כ∞.

דוגמאות

1. $f(z)=e^{1/z}$. נראה שלf קיימת סינגולריות עיקרית ב0:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ 0<z\in\mathbb{R}}} e^{1/z}=\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ 0>z\in\mathbb{R}}} e^{1/z}=\lim_{x\to 0^-} e^{1/z}=0$$

כיוון שיש גבולות שונים בכיוונים שונים, לא קיים $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ - לא במובן הרגיל ולא במובן הרחב. לכן יש כאן סינגולריות עיקרית.

2. $f(z)=\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. נראה שיש סינגולריות עיקרית באפס:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} \sin\frac{1}{z}=\lim_{0\leftarrow x\in\mathbb{R}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

שאינו קיים!

משפט 3(משפט ווירשטראס־קסורט Weierstrass-Casoreti)

נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ובעלת סינגולריות עיקרית בz_0. אזי לכל סביבה מנוקבת S של z_0 התמונה

$$f\left(S\right)=\left\{f\left(z\right)|z\in S\right\}$$

צפופה ב$\mathbb{C}$. ז.א. לכל עיגול $B\subset\mathbb{C}$, $\emptyset\neq B\cap f\left(s\right)$.

הוכחה(בדרך השלילה)

נניח שקיימת סביבה מנוקבת S של z_0 ועיגול $B\left(a,r\right)\subset\mathbb{C}$ כך ש$f\left(s\right)\cap B\left(a,r\right)=\emptyset$. ז"א לכל $z\in S$ $f\left(z\right)\notin B\left(a,r\right)$. לכן $\left|f\left(z\right)-a\right|\geq r$. כעת עבור $z\in S$ נגדיר $g\left(z\right)=\dfrac{1}{f\left(z\right)-a}$.

כיוון שלכל $z\in S$ $f\left(z\right)\neq a$, g אנליטית בS. יתר על כן:

$$\left|g\left(z\right)\right|=\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a\right|}\leq\frac{1}{r}$$

ז.א. $g\left(z\right)$ חסומה בסביבה מנוקבת S של z_0.

לפי משפט 1 הסינגולריות של g בz_0 סליקה וקיים

$$\mathbb{C}\ni L=\lim_{z\to z_0}g\left(z\right)$$

כעת אם $z\in S$

$$g\left(z\right)=\frac{1}{f\left(z\right)-a}$$

$$f\left(z\right)-a=\frac{1}{g\left(z\right)}$$

$$f\left(z\right)=a+\frac{1}{g\left(z\right)}$$

כעת יש שני מקרים:

(א) $\lim\limits_{z\to z_0}g\left(z\right)=L\neq0$. במקרה זה

$$\lim_{z\to z_0}f\left(z\right)=\lim_{z\to z_0}a+\frac{1}{g\left(z\right)}=a+\frac{1}{L}\in\mathbb{C}$$

כיוון שיש גבול(רגיל) משפט 1 אומר שהסינגולריות של f בz_0 סליקה ־ בניגוד לנתון!

(ב) $\lim\limits_{z\to z_0}g\left(z\right)=0$. במקרה זה

$$\lim_{z\to z_0}f\left(z\right)=\lim_{z\to z_0}a+\frac{1}{g\left(z\right)}=a+\text{"}\frac{1}{0}\text{"}=\infty$$

לכן לf יש קוטב בz_0 ־ בניגוד לנתון.

בכל מקרה הגענו לסתירה לנתון. הסתירה מוכיחה את המשפט.

■

תזכורת

עד כאן הוכחנו את משפט קושי רק בתחום קמור. ז.א. אם $f(z)$ אנליטית בתחום קמור $D\subset\mathbb{C}$ ואם γ מסילה סגורה בD אז

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

באותם הנתונים הוכחנו את נוסחת קושי אם $z\notin\gamma$.

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

הדרישה שD תחום קמור מלאכותית ומגבילה יותר מדי.

בשביל הגירסה היותר כללית של משפט קושי יש להגדיר "תחום פשוט קשר". בלשון בני אדם זה תחום פתוח בלי חורים.

שקול: קבוצה פתוחה $D\subset\mathbb{C}$ היא תחום פשוט קשר $\Leftrightarrow$ המשלים בכדור של רימן $S^2\backslash D$ קשיר(ואם D חסום, זה שקול לכך ש$\mathbb{C}\backslash D$ קשיר).

שקול: תחום פתוח $D\subset\mathbb{C}$ פשוט קשר $\Leftrightarrow$ לכל $z_0\notin D$ ולכן מסילה סגורה γ בD, $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)=0$. ז.א. מסילה סגורה ב$D$ לא יכולה להקיף נקודה שאינה בD, וזאת דרך מתמטית לומר שאין בD חורים.

משפט קושי המוכלל

אומר שאם $D\subset\mathbb{C}$ תחום(פתוח) פשוט קשר, אם $f\in H(D)$, ואם γ מסילה סגורה בD, אז

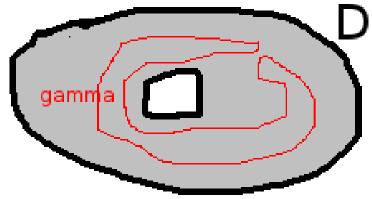
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

כמו כן אם $z\in D\backslash\gamma$

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

(שזה הכללה של נוסחת קושי).

יש הכללה של משפט קושי לתחום כללי שאינו פשוט קשר. נדגים את הדבר:



נניח ש$f(z)$ אנליטית בD.
$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ כי γ תוחמת $D_1 \subset D$ שהוא פשוט קשר. נסגור את ה"פרצה" בγ
להסיק ש $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
ז.א. $\int_{\gamma_2+\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ שקול ל

$$\oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z$$

עוד נכליל את השוויון למספר ספוי של מסילות בעוד שבועיים!