<u>פתרון תרגיל 4</u>

1. א)+ב) יש 6 איברים. איבר מסדר 3 הוא $g=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ (שימו לב ש- $g^3=I$, $g^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$).

לכן יש 2 מחלקות שמאליות של <g> ב- $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ (על פי לגרנז'). נסמן $a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ (שימו לב ש-

$a\notin$<g>). לכן המחלקות הן: <g>,a<g>.

2. א) $U_{14}=\{1,3,5,9,11,13\}$. $H=\{1,9,11\}=\langle 9\rangle$ (שימו לב: הפעולה פה היא כפל mod 14). על פי לגרנז' יש 2 מחלקות (כי $[U_{14}:H]=|U_{14}|/|H|$) : H ו- 3H.

ב) נסמן $G=\langle(2,2)\rangle$ שימו לב שהפעולה ב- $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$ היא חיבור רכיב-רכיב. הסדר של (2,2) ב- $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$ הוא 12 (למה?) ולכן הסדר של G הוא 12. ז"א (על פי לגרנז') שמספר המחלקות הוא 2.

נשים לב ש- $G=2\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$ ולכן המחלקות של G ב- $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$ הן G ו- G+(1,0) (מכיוון ש- $(1,0)\notin G$).

ג) $H=\langle 15\rangle=\{15,10,5,0\}$ ולכן יש , על פי לגרנז', 5 מחלקות שמאליות ב- Z_{20}. המחלקות הן H,1+H,2+H,3+H,4+H.

3. ההוכחה ש-H היא ת"ח היא טכנית. בקשר למספר המחלקות:

$$\text{if}\ \ g_b=\begin{pmatrix}b&0\\0&1\end{pmatrix}, b\in Q\setminus\{0\}\ \ \text{then}\ \ g_bH=\begin{pmatrix}b&ba\\0&1\end{pmatrix}$$

לכן, אם c,d הם שני מספרים רציונליים (שונים מאפס) כך ש- $c\neq d$, אז $g_cH\neq g_dH$. לכן מספר המחלקות של H ב-G הוא לפחות מספר המספרים ב-Q ולכן $[G:H]=\infty$.

4. (i) מכיוון ש- ab=ba אז

$H:=\langle a,b\rangle=\langle a\rangle\times\langle b\rangle \rightarrow |H|=|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|=|a|\cdot|b|=3\cdot 5=15$

ו- $[G:H]=|G|/|H|=17!/15$

(ii) כן. ניקח $c=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $d=(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17)$.

5. תהי D_4 החבורה הדיהדרלית $a,b\in D_4$ (כאשר b איבר מסדר 2 – שיקוף, ו-a איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $K=\langle a^2\rangle$, $H=\langle b\rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תת החבורה H ו-K. חשבו את [G:K], [G:H] .

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H ו-K ב-G ובדקו אם המחלקות הימניות שוות למחלקות השמאליות.

5. **א)** $H=\{e,b\}$

$K=\{e,a^2\}$

לפי משפט לגרנז' אם $H \le G$ אז $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$:

במקרה שלנו $4=\frac{8}{2}=\frac{|G|}{|H|}=[G:H]$

ו- $4=\frac{8}{2}=\frac{|G|}{|K|}=[G:K]$.

ב)

I) המחלקות השמאליות של H ב- G הן:

$$H=\{e,b\}, a\cdot H=\{a,ab\}, a^2\cdot H=\{a^2,a^2b\}, a^3\cdot H=\{a^3,a^3b\}$$

ומתקיים:

$$\{a,ab\}=a\cdot H\neq H\cdot a=\{a,ba\}=\{a,a^3b\}.$$

II) המחלקות השמאליות של K ב- G הן:

$$K=\{e,a^2\}, a\cdot K=\{a,a^3\}, b\cdot K=\{b,ba^2\}, ba\cdot K=\{ba,ba^3\}$$

ניתן לבדוק שכל המחלקות הימניות שוות לשמאליות.

6. א) 6 איברים, וזו חבורה ציקלית הנוצרת (למשל) על ידי (5 4 1)(6 3).
ב) $U_{11}=\{1,2,3,\ldots,10\}$ – בסה"כ 10 איברים. זו חבורה ציקלית, הנוצרת (למשל) על ידי 2 (מספיק לבדוק שהסדר של 2 הוא מינימום 6. למה?).
ג) $U_{16}=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ – בסה"כ 8 איברים וזו אינה חבורה ציקלית.
ד) נשים לב – החבורה הנוצרת על ידי b=(2,9) ב- $Z_{14}\times Z_{20}$ היא $2Z_{14}\times Z_{20}$ (מכיוון ש-9 יוצר את Z_{20} והת"ח הנוצרת על ידי 2 ב- Z_{14} היא $2Z_{14}$). החבורה הנוצרת על ידי a=(4,5) ב- $Z_{14}\times Z_{20}$ היא $2Z_{14}\times 5Z_{20}$. מכיוון שהפעולה אבלית, נקבל שהחבורה הנוצרת על ידי a ו- b היא $2Z_{14}\times Z_{20}$. יש בה 140 איברים והיא ציקלית (מכיוון שהיא איזומורפית ל- $Z_7\times Z_{20}$ וזו חבורה ציקלית שנוצרת על ידי (1,1) – בדקו שהסדר של (1,1) הוא 140 בחבורה זו). ($2Z_{14}\times Z_{20}$ נוצרת על ידי (2,1)).
ה) 4 איברים, אינה חבורה ציקלית (איזומורפית ל- $Z_2\times Z_2$).

7.
ראשית – שימו לב: העתקה f היא מוגדרת היטב אם כשמתקיים a=b אז f(a) = f(b).
ניקח את החבורה הדיהדרלית $G=D_3=<\sigma,\tau>$ ואת התת חבורה שלה H הנוצרת ע"י τ (השיקוף), ז"א $H=\{1,\tau\}$. נסמן ההתאמה xH → Hx ב- f.
נכתוב את המחלקות השמאלית והימנית של σ ביחס ל- H.

$$\sigma H=\{\sigma,\sigma\tau\}$$

$H\sigma=\{\sigma,\tau\sigma\}$. לכן – f(σH) = Hσ.