פתרון בוחן בדידה קיץ תשע"ט

ו' מנחם־אב ה'תשע"ט, 7.8.19

מרצים: תמר בר־און, ד"ר אפי כהן, אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר.
מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר־און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, עובד נגר, עומר נטר, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

- יש לענות על כל השאלות!
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה ורבע + רבע שעה הארכת זמן.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

או באופן שקול:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

(20 נק')

<u>פתרון:</u>

בסיס: עבור $n = 1$ אכן $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

צעד: נניח נכונות ל־n, שמתקיים:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

ונוכיח עבור $n+1$, שמתקיים:

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

הוכחה:

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{*}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+1+(k-1)} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \frac{2-1}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

כאשר המעבר $*$ נובע מהנחת האינדוקציה.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{N}$ קיימת קבוצה $C \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־ $A\Delta C = B\Delta C$. (20 נק')

(ב) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $P(A \setminus B) \neq P(A) \setminus P(B)$. (20 נק')

<u>פתרון:</u>

א. הפרכה: ניקח $A = \{1\}, B = \varnothing$, אזי לכל $C \subseteq \mathbb{N}$ נקבל $A\Delta C \neq B\Delta C = C$ כי: אם $1 \in C$ אז $1 \in C \setminus (A\Delta C)$, ואחרת $1 \in (A\Delta C) \setminus C$.

דרך נוספת: ניקח $A = \mathbb{N}, B = \varnothing$, ואז לכל $C \subseteq \mathbb{N}$ נקבל: $A\Delta C = C^c \neq C = C\Delta B$.

ובאופן כללי, ראינו שבהינתן קבוצה X ותת קבוצה $Y \subseteq X$, אז הפונקציה $f : P(X) \to P(X)$ המוגדרת $f(Z) = Z\Delta Y$ היא חח"ע מה שנותן הדרוש.

ב. הוכחה: לכל 2 קבוצות A, B מתקיים $\varnothing \in P(A \setminus B), P(A), P(B)$, ולכן: $\varnothing \in P(A \setminus B) \wedge \varnothing \notin P(A) \setminus P(B)$, ולכן הקבוצות שונות (כי יש איבר שאיננו בשתיהן).

3. נניח $(A, \preceq)$ קבוצה סדורה חלקית (כלומר, A קבוצה ו־$\preceq$ יחס סדר מעל A). נגדיר יחס R על A באופן הבא: לכל $a, b \in A$:

$$(aRb) \iff (a \preceq b \vee b \preceq a)$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\preceq$ יחס סדר מלא (לינארי) אז R יחס שקילות. (20 נק')

(ב) אם R יחס שקילות אז $\preceq$ יחס סדר מלא (לינארי). (20 נק')

פתרון:

א. הוכחה: נראה פשוט ש־ $R = A \times A$, ויחס זה הוא תמיד שקילות (יש בו מחלקת שקילות אחת והיא A). ואכן, יהיו $a, b \in A$ אזי כיון שהיחס $\preceq$ מלא (לינארי) נקבל $a \preceq b \vee b \preceq a$ מה שגורר aRb.

ב. הפרכה: ניקח $\preceq = \{(1,1),(2,2)\}$, $A = \{1,2\}$, היחס $\preceq$ איננו מלא, והיחס R המתקבל הוא $R = \{(1,1),(2,2)\}$ שהוא יחס שקילות. ובאופן כללי: יחס הזהות על קבוצה עם לפחות שני איברים הוא יחס סדר שאיננו מלא, אבל יחס R המתקבל ממנו גם הוא יחס הזהות ולכן שקילות.