1. א. פשוט לראות כי אורך המסילה הוא $L=2+\pi$. האינטגרנד בערך מוחלט הוא

$\left|e^z-\overline{e^z}\right|=\left|2i\,\mathrm{Im}\left(e^z\right)\right|=\left|2ie^x\sin y\right|=2e^x\left|\sin y\right|\le 2e^x$. במסילה שלנו x יכול להיות לכל היותר

1, ולכן $e^x\le e$. מכאן ש- $M=\max\limits_{z\in\gamma}\left|e^z-\overline{e^z}\right|\le 2e$. בסה"כ האינטגרל חסום ע"י

$$ML=2\left(\pi+2\right)e$$

ב. קל לראות כי אורך המסילה הוא $L=\pi+2$. האינטגרנד בערך מוחלט (על המסילה) הוא

$\left|\frac{2-z}{2+\overline{z}}\right|\le\frac{2+|z|}{\left|2-|\overline{z}|\right|}\le\frac{3}{1}=3$. כלומר $M\le 3$. בסה"כ $ML\le 3\pi+6$.

2. א. משתמשים בנוסחת קושי עם $f\left(z\right)=\left(z+1\right)^7$ ומקבלים $256\pi i$

ב. משתמשים בנוסחת קושי עם $f\left(z\right)=e^z$ ומקבלים $2\pi i$

ג. קודם כל משתמשים בשברים חלקיים $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$. לאחר מכן אפשר להפעיל את נוסחת קושי פעמים עם הפונקציה הקבועה $f\left(z\right)\equiv 1$. האינטגרל יוצא אפס.

ד. אין כאן מסלול סגור. אפשר לחשב ישירות. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(it\right)^2-1}idt=-i\int_{-1}^{1}\arctan\left(t\right)dt=0$

3. ע"פ נוסחת קושי ערך האינטגרל הוא $2\pi i$. מצד שני, חישוב באמצעות פרמטריזציה נותן

$$2\pi i=\int_0^{2\pi}\frac{e^{k\exp(i\theta)}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}\left(e^{k\cos\theta}\cos\left(k\sin\theta\right)+ie^{k\cos\theta}\sin\left(k\sin\theta\right)\right)d\theta$$

. ע"י השוואת

החלק הממשי והחלק המדומה מקבלים את הדרוש.

3. א. לפי נוסחת קושי לנגזרות עם

$$f(z)=e^{2z}$$

נקבל ש

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(-1)=\frac{2\pi i}{6}\cdot 8e^{-2}=\frac{8\pi i}{3e^2}$$

ב. נשים לב ששני השורשים של המענה, $\pm i$ נמצאים בפנים המסילה. נפצל לשברים חלקיים ונקבל

$$\frac{e^{tz}}{z^2+1}=\frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i}(\frac{e^{tz}}{z-i}-\frac{e^{tz}}{z+i})$$

נחשב רכיב רכיב עם הפונקציה כאשר $f(z)=e^{tz}$ (שהיא כמובן אנליטית) ונקבל לפי נוסחת קושי

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z-i}\mathrm{d}z=2\pi ie^{it}$$

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z+i}\mathrm{d}z=2\pi ie^{-it}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{tz}}{z^2+i}\mathrm{d}z=2\pi i\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=2\pi i\sin t$$

ג. השטיק פה הוא שבעיית האנליטיות של $\frac{\sin z}{z}$ בנקודה $z=0$ היא סליקה. אם מגדירים

$$g(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

לא רק שהפונקציה הזאת רציפה, היא אפילו אנליטית. (הסבר בנפנופי ידיים: יש לה פיתוח לטור חזקות בכל $\mathbb{C}$, הרי

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

ולכן

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

).

לכן אפשר להפעיל את נוסחת קושי עם $g(z)$ ולקבל

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 2\pi i \sin 1$$

ד. קל לראות שבעצם יש לנו:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

בתחום המדובר

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2}$$

אנליטית ולכן

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \frac{-\sin \pi \cdot 4 - 2(1+1)\cos \pi}{2^4} = \frac{\pi i}{2}$$

5. ע"י נוסחת קושי רואים שבסביבת הנקודה $z=1+i$ מתקיים $f(z)=2\pi i\left(3z^2+7z+1\right)$ (בגלל שהנקודה בתוך העיגול $|z|<3$). מכאן שהנגזרת היא

$$f'(1+i)=2\pi i\left(6(1+i)+7\right)=2\pi i(13+6i)=-12\pi+26\pi i\ .$$

6. שטויות במיץ. אם ניקח את $f(z) = z$ עם $\gamma(t) = it$ עבור $0 \leq t \leq 1$ אז

$$\int\limits_{\gamma} z \mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{1} it \cdot i = -\frac{1}{2}$$

ו

$$\int\limits_{\gamma} \mathrm{Re}(z) \mathrm{d}z = 0$$

ולכן השוויון לא מתקיים.