פתרון 2

שאלה 1:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, יהי $\varepsilon > 0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $\left||a_n| - |a|\right| \le |a_n - a| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

ב. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $|(-1)^n| = 1 \to 1$ אבל ל $a_n = (-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: $a_n = (-1) \to (-1) \neq 1$ אבל $a = 1$, $|a_n| \to |1|$

שאלה 2: א.

הוכחה:

מקרה 1:

הסדרה חסומה מלרע ולכן $L = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\} \in \mathbb{R}$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $b_{N_\varepsilon} \in \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ כך ש $b_{N_\varepsilon} < L + \varepsilon$. אבל מכיוון שהסדרה מונוטונית יורדת לכל $n > N_\varepsilon$ מתקיים $b_n \le b_{N_\varepsilon} < L + \varepsilon$. אבל L חסם מלרע ולכן מתקיים גם $L < b_n < L + \varepsilon$ ולכן ברור ש $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ כלומר $|b_n - L| < \varepsilon$ וסה"כ הראנו שהגדרת הגבול מתקיימת.

מקרה 2:

הסדרה אינה חסומה מלרע ולכן על פי הגדרה $\inf\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$. לכן יש להראות ש- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

יהי $m < 0$. הסדרה אינה חסומה מלרע ולכן קיים n_m (אינדקס שתלוי ב- m) טבעי כך ש $b_{n_m} < m$. אך מכיון שהסדרה מונוטונית יורדת נקבל ש $b_n < m$ $\forall n > n_m$. מכאן, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

ב.

הוכחה:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|\le\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|=\frac{1}{\sqrt{L}}\left|a_n-L\right|$$

לכן לכל $\varepsilon>0$, מתקיים $\sqrt{L}\varepsilon>0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|a_n-L\right|<\sqrt{L}\varepsilon$ ולכן מתקיים $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|<\frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{L}\varepsilon=\varepsilon$