בתרגול הקודם הגדרנו נורמות, וראינו שאחד הקריטריונים בהדגרה זה אי שוויון המשולש:
לכל שני וקטורים v,u מתקיים:

$$||v+u|| \leq ||v|| + ||u||$$

שאלה: האם הטענה הבאה נכונה:

$$||v+u|| = ||v|| + ||u||$$

אמ"ם v ו u ת"ל?
תשובה: הפרכה: ניקח את $V=\mathbb{R}^2$ עם הנורמה

$$|| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} || = |x| + |y|$$

ניתן לבדוק שזה אכן נורמה.
נקח $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$||v+u|| = || \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} || = |1| + |1| = 2$$

$$||v|| = ||u|| = 1$$

קיבלנו שוויון אע"פ שהוקטורים בת"ל.
מסתבר שגם בנורמה שמושרית מהמ"פ הרגילה, הטענה לא נכונה.
למשל אם נקח $v \neq 0, u=-v$. אז $||v+u|| = ||0|| = 0$ אבל $||v|| + ||u|| = 2||v|| \neq 0$.

אי שוויון קושי-שוורץ

יהי V ממ"פ. לכל שני וקטורים u,v מתקיים:

$$|\langle v,u \rangle| \leq ||v|| \cdot ||u||$$

ובנוסף, מתקיים שוויון אמ"ם v ו u ת"ל.
תרגיל: יהיו $a_1,\ldots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+\cdots+a_n^2)$.
פתרון: נבחר $v=(a_1,..,a_n), u=(1,..,1)$
מאי שוויון קושי שוורץ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ נקבל:

$$|a_1+...+a_n| \leq \sqrt{a_1^2+...+a_n^2}\sqrt{1^2+...+1^2}$$

נעלה את האי שוויון בריבוע (שני האגפים חיוביים)

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

מש"ל.

תרגיל: יהי V ממ"פ. נסמן ב$S = \{v \in V : ||v|| = 1\}$ עבור הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית.

יהי $0 \neq v \in V$.

ראיתם בהרצאה שיש מושג של "מרחק" בין שני וקטורים שמוגדר ע"י

$$\rho(v,u) = ||v-u||$$

הוכיחו שהנקודה הכי קרובה לv על מעגל היחידה היא $\frac{v}{||v||}$. כלומר,

$$||v - \frac{v}{||v||}|| = \min\{||v-u|| : u \in S\}$$

הוכחה:

$$||v-u||^2 = \langle v-u, v-u\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle =$$

$$||v||^2 + ||u||^2 - 2Re\langle v,u\rangle = ||v||^2 + 1 - 2Re\langle v,u\rangle$$

$$||v - \frac{v}{||v||}|| = ||(1 - \frac{1}{||v||})v|| = |\frac{||v||-1}{||v||}| \cdot ||v|| = |||v||-1|$$

נעלה את הביטוי האחרון הריבוע ונקבל $||v||^2 - 2||v|| + 1$

אנחנו רוצים להראות שלכל $u \in S$

$$||v - \frac{v}{||v||}||^2 \leq ||v-u||^2$$

כלומר

$$||v||^2 - 2||v|| + 1 \leq ||v||^2 + 1 - 2Re\langle v,u\rangle$$

שקול:

$$Re\langle v,u\rangle \leq ||v||$$

$$Re\langle v,u\rangle \leq |\langle v,u\rangle|$$

לפי אי שוויון קושי שוורץ

$$|\langle v,u\rangle| \le ||v||\cdot||u|| = ||v||$$

כי הנורמה של u היא 1, כי $u\in S$.

מרחב ניצב

הגדרה: יהי V ממ"פ ו $S\subseteq V$, אז המרחב הניצב של S הוא

$$S^{\perp} = \{v\in V : \forall u\in S, \langle v,u\rangle = 0\}$$

בהרצאה ראיתם ש $S^{\perp}$ הוא תמיד תת מרחב (גם אם S היא סתם קבוצה).

תכונות:

1. $T\subseteq S$ אז $T^{\perp}\subseteq S^{\perp}$
2. $S^{\perp} = (spanS)^{\perp}$

הוכחה: יהי $v\in T^{\perp}$. כלומר, לכל $u\in T$, $\langle v,u\rangle = 0$. בפרט, לכל $u\in S$ מתקיים $\langle v,u\rangle = 0$ (כי $S\subseteq T$ אז כל וקטור של S הוא גם וקטור של T). לכן $v\in S^{\perp}$.

2. בהרצאה.

מסקנה: יהי $W\le V$. איך נמצא את $W^{\perp}$?

נמצא בסיס לW, B, מתכונה 2 ידוע ש $W^{\perp} = (spanB)^{\perp} = B^{\perp}$. B היא קבוצה סופית, אז צריך לפתור מערכת עם מספר סופי של משוואות.

תרגיל: חשבו את $W^{\perp}$ עבור $W = \{(x,y,z,w) : x+y=0, z-2w=0\}$ (עם המ"פ הסטנדרטית).

פתרון: נמצא בסיס לW

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

אז $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in W^{\perp}$ אמ"ם הוא מקיים:

$$\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\rangle = 0$$

$$\langle\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\rangle = 0$$

$$x - y = 0$$

$$2z + w = 0$$

סה"כ

$$W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

הטלות

הטלה של וקטור על וקטור:
יהיו $v, u \neq 0 \in V$. הטלה של v על u היא וקטור $\pi_u(v)$ שמקיים 2 תכונות:
1. $\pi_u(v) \in span\{u\}$
2. $v - \pi_u(v) \perp u$

איך מחשבים את ההיטל? ידוע ש$\pi_u(v) = \alpha u$.

$$\langle v - \alpha u, u\rangle = 0$$

$$\langle v, u\rangle - \alpha\langle u, u\rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle v, u\rangle}{||u||^2}$$

דוגמא: מה ההטלה של $v = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ על $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$?
פתרון:

$$\pi_u(v) = \frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

הטלה של וקטור על תת מרחב:
יהי $v \in V$ ו$W \leq V$. ההיטל של v על W הוא וקטור $\pi_W(v)$ שמקיים:
1. $\pi_W(v) \in W$
2. $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

איך מחשבים היטל על תת מרחב?

נקח בסיס אורתוגונלי $\{w_1, .., w_n\}$

$$\pi_W(v) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$$

לכל i.

$$\langle v - \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n, w_i \rangle = 0$$

$$\langle v, w_i \rangle - \sum \alpha_j \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \alpha_i \langle w_i, w_i \rangle$$

$$\alpha_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{||w_i||^2}$$

תרגיל: מה ההטלה של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $W = span\{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$?

פתרון:

ראשית, נמצא בסיס או"ג לW. נשתמש בגראם-שמידט.

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_W(v) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1.5}{1.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

משפט הפירוק הניצב: יהי V ממ"פ ו$W \leq V$ אזי

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

1. הוכיחו את הטענות הבאות: עבור V ממ"פ

(א) אם V ממימד סופי אזי לכל $W \leq V$ מתקיים $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(ב) לכל שני תתי מרחבים U, W מתקיים $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

(ג) אם V ממימד סופי אזי לכל שני תתי מרחבים U, W מתקיים $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

תרגיל:

א- בהרצאה.

ב- נראה הכלה דו כיוונית.

$(U + W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$

יהי $v \in U^\perp \cap W^\perp$ כלומר $v \in U^\perp, v \in W^\perp$. כלומר לכל $u \in U$ ולכל $w \in W$ מתקיים

$$\langle v, u \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

$$\langle v, u + w \rangle = 0$$

לכל $u \in U, w \in W$ וככה נראה וקטור כללי ב$U + W$. כלומר, v מאונך לכל וקטור ב$U + W$, אז $v \in (U + W)^\perp$.

$(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$.

$U, W \subseteq U + W$ ולכן

$$(U + W)^\perp \subseteq U^\perp, W^\perp$$

ולכן

$$(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$$

ג. צריך להוכיח: אם V ממימד סופי אזי לכל שני תתי מרחבים U, W מתקיים $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

הוכחה: לפי סעיף ב, נשתמש בתתי המרחבים $U^\perp$ו$W^\perp$:

$$(U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = (U^\perp + W^\perp)^\perp$$

וידוע מסעיף א שפעמיים ניצב מחזיר למרחב, לכן

$$U \cap W = (U^\perp + W^\perp)^\perp$$

נעשה ניצב על הכל, ונקבל

$$(U \cap W)^\perp = ((U^\perp + W^\perp)^\perp)^\perp = U^\perp + W^\perp$$