לינארית 2 - מטלה 6 -לכסון

תאריך הגשה: $6.5.2018$ לתאים

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. **מספר תרגיל**
2. **שם מלא**
3. **ת.ז**
4. **מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.**

תרגיל 1. עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל $\mathbb{R}$, כלומר הע"ע וע"ו חייבים צריכים להיות ממשים
2. מעל $\mathbb{C}$, כלומר הע"ע וע"ו יכולים להיות מרוכבים

הערה. חלוקת הניקוד: שאלה זאת שווה ל-20 נקודות, כאשר מציאת הפולינום האופייני שווה 4 נקודות, סעיף 1 שווה 8 נקודות, וסעיף 2 שווה ל-8 נקודות

פתרון. :

ראשית נמצא את הע"ע של המטריצה

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - a\right] = (\lambda-1)\left[\lambda-1+\sqrt{a}\right]\left[\lambda-1-\sqrt{a}\right]\lambda$$

לכן הע"ע הם $\lambda = 1, 1-\sqrt{a}, 1+\sqrt{a}$

- אם $a > 0$ אז יש לנו שלושה עע ממשיים שונים ולכן היא לכסינה ב-$\mathbb{R}$ וב-$\mathbb{C}$
- אם $a < 0$ אז יש לנו שלושה עע מרוכבים שונים ולכן היא לכסינה ב- $\mathbb{C}$ אבל לא לכסינה ב-$\mathbb{R}$
- אם $a = 0$ אז יש לנו עע אחד $(\lambda = 1)$ הוא בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 ולכן היא איננה לכסינה (לא ב-$\mathbb{C}$ ולא ב-$\mathbb{R}$)

תרגיל 2.

1. לכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{C}$.

הערה. חלוקת הניקוד: שאלה זאת שווה ל-20 נקודות, סעיף 1 שווה 15 נקודות, וסעיף 2 שווה ל5 נקודות

פתרון. נמצא את ער ער והו"ע $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ לכן הע"ע הם $\lambda_{1,2} = i, -i$

$\lambda = i$: צריך למצוא את הבסיס ל-

$$N(iI - A) = N\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span\{(-i,1)\}$$

$\lambda = -i$: צריך למצוא את הבסיס ל-

$$N(-iI - A) = N\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span\{(i,1)\}$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. חשב את $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{100}$

פתרון. לפי התרגיל הקודם אנחנו יודעים ש-

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

לכן

$$\begin{aligned} A^{100} &= \left(\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{100} \\ &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad I \end{aligned}$$

תרגיל 3. יהיו A, B מטריצות עם n ע"ע שונים. הוכח שהן דומות אם ורק אם יש להם אותם ע"ע.

הערה. חלוקת הניקוד: שאלה זאת שווה ל-20 נקודות, כאשר כל כיוון שווה ל-10 נקודות

פתרון. נניח שהן דומות ול-A יש את ע"ע $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ אז

$$A = P^{-1}BP$$

וכן מתקיים

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1}$$

לכן

$$P^{-1}BP=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}=Q^{-1}P^{-1}BPQ$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}=(PQ)^{-1}B(PQ)$$

כלומר Bדומה למטריצה אלכסונית, לכן הע"ע שלה הם אברי האלכסון ($\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$)

נניח שיש להם אותם ע"ע לכן מתקיים

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}=Q^{-1}AQ$$

ו-

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}=P^{-1}BP$$

מכאן

$$Q^{-1}AQ=P^{-1}BP$$
$$\Downarrow$$
$$A=QP^{-1}BPQ^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$A=\left(PQ^{-1}\right)^{-1}B\left(PQ^{-1}\right)$$

תרגיל 4. יהיו $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ (a,b,c שונים) ו- $B=\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

1. מצא P כך ש-$A=P^{-1}BP$ רמז: לכסנו את B כך שהיא תתאים למטריצה A.

הערה. חלוקת הניקוד: שאלה זאת שווה ל-20 נקודות, כאשר ההישג הנדרש הוא מציאת P

פתרון. נניח שהן דומות ול-A יש את ע"ע $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ נלכסן את המטריצה(למרות שהיא כבר אלכסונית) כך שעע הראשון יהיה a

ניתן לראות בקלות שע"ע של B הם a,b,c והו"ע הם $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ של a, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ של b ו- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ של c לכן

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

כלומר

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

2. (רשות) אחרי שמצאת את P האם יש לך תובנה למה היא נראת ככה? רמז: P מטריצה אלמנטרית.

פתרון. נניח שהן דומות ול-A יש את ע"ע $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ נלכסן את המטריצה(למרות שהיא כבר אלכסונית) כך שעע הראשון יהיה a

ראשית נשים לב ש-$P^{-1}=P$לכן

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

כפל משמאל במטריצה אלמטרית שקול לבצע את הפעולה האמנטית על השורות כלומר

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix}$$

הוא ביצוע החלפת שורות 1,3.

בעוד שכפל מימין במטריצה האלמטרית שקול לבצע את הפעולה על העמודות לכן

$$\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$$

זה ביצוע החלפת עמודות 1,3.

תרגיל 5. תהי סדרת $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$ סדרת פיבונצי המוגדרת כעל ידי כלל נסיגה

$$\begin{cases}a_1=1\\a_0=0\\a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad n>2\end{cases}$$

1. מצא A כך ש- $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}$

הערה. חלוקת הניקוד: שאלה זאת שווה ל-20 נקודות,סעיף 1 שווה ל-5 נקודות, סעיף 2 שווה ל-10 נקודות, סעיף 3 שווה ל-5 נקודות. במקרה של טעויות חישוב יש להקל עליהם.

פתרון.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix} &=\\ &\begin{pmatrix}a_n+a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix} &=\\ &\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix} &=\end{aligned}$$

2. חשב את A^{n-1} . (רמז: לכסן את המטריצה, לא להבהל אם החישובים לא יפים)

פתרון.

אם נלכסן אותה נקבל ש-

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-1} &= \left(\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{n-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&0\\0&\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&0\\0&\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\-1&\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}&-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\\\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. ניתן להסיק ש-$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, העזרת זה מצא את הנוסחא ל-a_n.

פתרון.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix} &= A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}&-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\\\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}&\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\\\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לסיכום קבלנו ש-

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

לכן

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

בהצלחה!!