חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובבסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

# תרגיל 2 - חסמים

## <u>שאלה 1</u>

הוכיחו שהמספרים הבאים אינם רציונאליים:

א. $\sqrt[3]{3}$
ב. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ (רמז: הוכיחו תחילה כי $\sqrt{21}$ אינו רציונאלי.)

## <u>פתרון</u>

א. נניח בשלילה ש- $\sqrt[3]{3}$ רציונאלי. לכן ניתן להציג אותו כשבר מצומצם $\frac{m}{n}=\sqrt[3]{3}$.
נעלה בחזקה שלישית את שני האגפים $3=\frac{m^3}{n^3}$. מתקיים: $3n^3=m^3$. לכן $m^3$ מתחלק ב-3, ולכן גם $m$ (3 הוא ראשוני). כלומר, קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $m=3k$.
נציב ונקבל: $3n^3=27k^3\to n^3=9k^3$ וניתן להסיק שגם $n$ מתחלק ב-3, בסתירה לכך שהשבר היה מצומצם.

ב. נתחיל עם $\sqrt{21}$. נניח בשלילה שהוא רציונאלי ומהצורה $\sqrt{21}=\frac{m}{n}$ (שבר מצומצם). לכן $21n^2=m^2$. אגף שמאל מתחלק ב-3, ולכן גם אגף ימין מתחלק ב-3. נוכל להציג $m=3k$ ולהציב ולקבל: $21n^2=9k^2\to 7n^2=3k^2$. אגף ימין מתחלק ב-3, ולכן גם שמאל. אבל 7 לא מתחלק ב-3 ולכן בהכרח $n^2$ מתחלק ב-3. בסתירה לכך שהשבר היה מצומצם. (שימו לב שהיה אפשר להגיע לאותה סתירה גם עם הגורם 7.)
נמשיך עם $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. נניח בשלילה שהוא רציונאלי, אזי גם $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=10+2\sqrt{21}$ רציונאלי. ולכן גם $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2-10}{2}$ רציונאלי.

מש"ל

## <u>שאלה 2</u>

יהי $x\in\mathbb{R}$ מספר ממשי המקיים $x\geq 0$. נניח בנוסף שמתקיים $x<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$. הוכיחו או הפריכו: $x=0$.

## <u>פתרון</u>

נניח בשלילה $x\neq 0$, לכן לפי הנתון $x>0$. ניקח $\varepsilon=\frac{x}{2}$, לכן $0<\varepsilon<x$ בסתירה לנתון ש**לכל** $0<\varepsilon$ מקיים $x<\varepsilon$.

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

## שאלה 3

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שקיים $\varepsilon > 0$ עבורו מתקיים $a > \varepsilon$ לכל $a \in A$. הוכיחו שאפס איננו החסם התחתון של $A$.

## פתרון

נניח בשלילה שאפס הינו החסם התחתון של $A$. ניקח $0 < \frac{\varepsilon}{2}$. ברור ש $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ולכן $\forall a \in A : a > \frac{\varepsilon}{2}$

כלומר $\frac{\varepsilon}{2}$ חסם מלרע גדול מאפס, בסתירה לכך שאפס הינו החסם מלרע הגדול ביותר.

## שאלה 4

נתון ש- $S \subseteq T$. מה הקשר בין $\inf S$ לבין $\inf T$?

## פתרון

יהי $M$ חסם מלרע של $T$. אזי $\forall x \in T : x \geq M$. מכיוון ש- $S \subseteq T$ מתקיים $\forall x \in S : x \geq M$. לכן $M$ חסם מלרע של $S$. $\inf T$ הינו חסם מלרע של $T$ ולכן גם חסם מלרע של $S$. לכל $N$ חסם מלרע של $S$ מתקיים $\inf S \geq N$ ולכן $\inf S \geq \inf T$.

## שאלה 5

מצאו חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים) של הקבוצות הבאות:

א. $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

ב. $B = \left\{ (-1)^{n-1} \left( 2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$

## פתרון

א. נוכיח ש-1 הינו חסם עליון. לשם כך נראה תחילה שהוא חסם מלעיל. מתקיים $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq 1$. נראה כעת שהוא מינימלי, כלומר, לכל $\varepsilon > 0$, $1 - \varepsilon$ אינו חסם מלעיל. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon > \frac{1}{n_0}$. מתקיים $1 - \frac{1}{n_0} > 1 - \varepsilon$.
קל לראות ש-1 לא שייך לקבוצה ולכן אין מקסימום.

נוכיח ש $0$ מינימום ובפרט חסם תחתון. ראשית אם מציבים $n=1$ נקבל ש $1-\frac{1}{n}=0$. כמו כן לכל $n\geq 1$ מתקיים $\frac{1}{n}\leq 1 \to -\frac{1}{n}\geq -1 \to 1-\frac{1}{n}\geq 0$. לכן אפס חסם מלרע השייך לקבוצה ומכאן הוא מינימום ובפרט חסם תחתון.

ב. נוכיח ש5 מקסימום ובפרט חסם עליון. לכל $n\geq 1$ מתקיים $(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)\leq\left|(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right|=2+\frac{3}{n}\leq 5$ ועבור $n=1$ נקבל שוויון. לכן 5 הוא מקסימום.

נוכיח שהמינימום הוא $-3\frac{1}{2}$. עבור $n=2$ נקבל ש- $-3\frac{1}{2}$ שייך קבוצה. נותר להראות שזה חסם מלרע. צ"ל שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $-3\frac{1}{2}\leq(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$.

עבור האי-זוגיים הטענה ברורה. נוכיח עבור הזוגיים. עבור $n$ זוגי האיבר הכללי הוא $-2-\frac{3}{n}$. מתקיים $\forall n\geq 2$ $\frac{3}{n}\leq\frac{3}{2}$. מכאן נקבל שלכל $n$ זוגי $-\frac{3}{n}\geq-\frac{3}{2}\to -2-\frac{3}{n}\geq -3\frac{1}{2}$.

מש"ל

## **<u>שאלה 6</u>**

יהיו $A,B$ שתי קבוצות חסומות מלרע. נגדיר: $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$ ו- $A\cdot B=\{a\cdot b : a\in A, b\in B\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$

ב. $\inf(A\cdot B)=\inf(A)\cdot\inf(B)$

<u>פתרון</u>

<u>פתרון א:</u> הוכחה. צ"ל: $\inf(S+T)=\inf(S)+\inf(T)$

נוכיח שני אי-שוויונים:

$\geq$: לכל $s\in S$ מתקיים $s\geq\inf S$ וגם לכל $t\in T$ מתקיים $t\geq\inf T$. לכן $s+t\geq\inf S+\inf T$ לכל $s\in S, t\in T$, ומכאן $\inf(S+T)\geq\inf S+\inf T$.

$\leq$: על פי הטענה מהכיתה מספיק להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים: $\inf(S+T)<\inf S+\inf T+\varepsilon$. זה שקול ל- $\inf(S+T)<\left(\inf S+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\inf T+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$\left(\inf S+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ אינו חסם מלרע של $S$ ולכן קיים $s_0 \in S$ עבורו $\left(\inf S+\frac{\varepsilon}{2}\right)>s_0$. באופן דומה קיים $t_0 \in T$ עבורו $\left(\inf T+\frac{\varepsilon}{2}\right)>t_0$. מאידך, ברור ש- $\inf\left(S+T\right)\le s_0+t_0$, וזה מוכיח את הדרוש.

מש"ל

<u>פתרון ב:</u>

הפרכה:

$A=\{-2\},\ \ B=\{1,-5,7\}$
$\inf A=-2\,,\inf B=-5$
$\inf\left(A\cdot B\right)=-14$

מש"ל