אינפי 1 – פתרון תרגיל 3

תזכורת: עבור $\alpha > 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ ועבור $|\alpha| < 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

1. עבור הסדרות הבאות, מצא האם קיים גבול, ואם כן מצא אותו והוכח שהוא אכן הגבול (בשימוש בהגדרת הגבול, שלילת גבול או אריתמטיקה של גבולות):

א. $\frac{1}{\sqrt{n}}$

פתרון: נוכיח שהגבול הוא 0. יהיה $\varepsilon > 0$ יש להראות שקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$. זה נכון אם ניקח $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

ב. $\frac{1}{n}\sin(n!)$

פתרון: $\frac{1}{n} \to 0$, $-1 \le \sin(n!) \le 1$ כלומר חסומה ולפי משפט, הכפל שלהן שואף לאפס.

ג. $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

פתרון: $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \frac{n}{n+2} \to 1$

ד. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון: $\frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ ($a^n \to \infty$ אם $a > 1$, $a^n \to 0$ אם $a < 1$)

ה. $\frac{3^n}{2^{(n^2)}}$

פתרון: $n^2 > 2n$ עבור $2 \le n$. לכן פרט לאיבר הראשון $0 \le \frac{3^n}{2^{(n^2)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{\left(2^2\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$

2. הוכח: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $\left\|a_n\right\|=\left\|a_n-0\right\|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left\|\left\|a_n\right\|\right\|<\varepsilon$, מ.ש.ל.

3. הוכח: אם a_n מתכנסת אזי היא חסומה מלעיל ומלרע

פתרון: ניקח $\varepsilon=1$ אזי קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $L-1<a_n<L+1$. ניקח $n_1>n_0$ כלשהוא ונגדיר $M=\max\{a_1,....a_{n_1},L+1\}$ ו $m=\min\{a_1,....a_{n_1},L-1\}$ אזי $\forall n\in\mathbb{N}: m\le a_n\le M$.

4. הוכח/הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, אזי $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, יהי $\varepsilon>0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left\|a_n-a\right\|<\varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $\left\|\left\|a_n\right\|-\left\|a\right\|\right\|\le\left\|a_n-a\right\|<\varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\left\|a_n\right\|=\left\|a\right\|$

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $\left\|(-1)^n\right\|\to 1=1$ אבל ל $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

הפרכה: $1\ne(-1)\to(-1)=a_n$ אבל $a=1$, $\left\|a_n\right\|\to\left\|1\right\|$

ד. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף

(שימו לב שבסעיפים ד',ה',ו' הכוונה הייתה ש- $a_n\ne0$ לכל $n\in\mathbb{N}$).

הפרכה: ייתכן של b_n אין גבול לכלל. $b_n=(-1)^n n$, $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ בעל גבולות חלקיים $\pm\infty$

ה. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $b_n=\left\|\dfrac{1}{a_n}\right\|$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

פתרון: אם נניח ש $a_n\ne0$ החל ממקום מסוים בסדרה יהיה ניתן להוכיח כך: נניח $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. לכל $\varepsilon>0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left\|a_n\right\|<\varepsilon$. לכן לכל $M>0$ ניקח $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$, לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left\|a_n\right\|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$ ולכן $\dfrac{1}{\left\|a_n\right\|}>M$ = $\left\|\dfrac{1}{a_n}\right\|$.

אבל, ייתכן ו- $a_n=0$ אינסוף פעמים בסדרה, ואז לסדרה b_n יש אינסוף איברים שאינם מוגדרים, ולכן היא לא מוגדרת ואין לה גבול.

ו. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$

הפרכה: $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ אבל $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\to 1$

5. תהי a_n סדרה מתכנסת לגבול ממשי $L\in\mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכח:
הסדרה $c_n=a_nb_n$ מתכנסת אם"ם $L=0$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $\lim_{n\to\infty} c_n=M\in\mathbb{R}$ צריך להוכיח $L=0$. נניח בשלילה $L\neq 0$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\frac{M}{L}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}$ אבל $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ ולכן קיבלנו ש b_n מתכנסת בסתירה. (שימו לב ש $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ רק כאשר $a_n\neq 0$ אבל זה נכון אולי פרט למספר סופי של איברי a_n מכיוון שגבול הסדרה שונה מאפס).

$\Rightarrow$ נניח $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, הוכחנו בהרצאה שהמכפלה של סדרה ששואפת לאפס בסדרה חסומה, שואפת לאפס.

6. תהי $\{b_n\}$ סדרה יורדת. הוכח ש- $\lim_{n\to\infty} b_n=\inf\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$

הוכחה:

<u>מקרה 1</u>:

הסדרה חסומה מלרע ולכן $L=\inf\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}\in\mathbb{R}$. לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $b_{N_\varepsilon}\in\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$ כך ש $b_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$. אבל מכיוון שהסדרה מונוטונית יורדת לכל $n>N_\varepsilon$ מתקיים $b_n\le b_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$. אבל L חסם מלרע ולכן מתקיים גם $L<b_n<L+\varepsilon$ ולכן ברור ש $L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon$ כלומר $|b_n-L|<\varepsilon$ וסה"כ הראנו שהגדרת הגבול מתקיימת.

<u>מקרה 2</u>:

הסדרה אינה חסומה מלרע ולכן על פי הגדרה $\inf\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$. לכן יש להראות ש- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

יהי $m<0$. הסדרה אינה חסומה מלרע ולכן קיים n_m (אינדקס שתלוי ב- m) טבעי כך ש $b_{n_m} < m$. אך מכיון שהסדרה מונוטונית יורדת נקבל ש $b_n < m \quad \forall n > n_m$. מכאן, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה אי שלילית המתכנסת ל $0<L$. הוכח ש $\lim_{x\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$

הוכחה:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right| = \left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right| \le \left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right| = \frac{1}{\sqrt{L}}\left|a_n-L\right|$$

לכן לכל $\varepsilon>0$, מתקיים $\sqrt{L}\varepsilon>0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\sqrt{L}\varepsilon$ ולכן מתקיים $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right| < \frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{L}\varepsilon = \varepsilon$

8. מצא את גבול הסדרה $\sqrt[n]{a}$ עבור $0\le a\in\mathbb{R}$ והוכח שהוא אכן הגבול. רמזים:

* הפרד בין מקרים שונים של a

* חוק הסנדביץ: אם $a_n\to L$ ו $b_n\to L$ ו $a_n\le c_n\le b_n$ אזי $c_n\to L$. השתמש בחוק זה ובגבולות של סדרות שלמדנו

*אריתמטיקה של גבולות

פתרון: נניח $a>1$ אזי $1\le\sqrt[n]{a}$ אחרת $1>\sqrt[n]{a}$ נעלה בחזקת n ונקבל $1>a$ בסתירה. ניקח $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $n_0>a$ אזי לכל $n>n_0$ מתקיים $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{n}$. לכן פרט למספר סופי של איברים $1\le\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{n}$. למדנו בכיתה ש $\sqrt[n]{n}\to1$ ולכן לפי משפט הסנדביץ' $\sqrt[n]{a}\to1$.

נניח $a=1$ אזי ברור ש $\sqrt[n]{a}=1\to1$

נניח $a<1$, אזי $b=\frac{1}{a}>1$ אזי $\sqrt[n]{b}\to1$ כלומר $\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to1$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}=\frac{1}{1}=1$

עבור $a=0$ ברור ש $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt[n]{a}=0$ ולכן $\sqrt[n]{a}\to0$

<u>דרך אחרת</u> (של המקרה : $0<a$)

נגדיר $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a$. הגבול : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{a} = 1$ ולכן לפי משפט שלמדנו בתרגול:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.