①   בס"ד

לינארית 2 - תרגול 3

להזכיר על ה"ל, חח"ע, על, איזומורף

הגדרות: תהי $T: V \to W$

"הגרעין של T" $= \ker T = \{v\in V : T(v)=0\}$

"התמונה של T" $= \operatorname{Im} T = \{w\in W : \underset{T(v)=w}{\exists v\in V}\}$

שניהם תתי מרחבים!!

דוגמאות:

1) תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T\binom{x}{y}=(x-y,\,2x-2y)$ ה"ל.

$\ker T=\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 : T\binom{x}{y}=0\} = \{\binom{x}{y} : \begin{matrix} x-y=0 \\ \text{וגם} \\ 2x-2y=0\end{matrix}\} =$

$= \{\binom{x}{y} : x=y\} = \{\binom{x}{x}\} = sp\{\binom{1}{1}\}$

$$\boxed{\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x=y}$$

$\operatorname{Im}T = \{(x-y,\,2x-2y) : x,y\in\mathbb{R}\} = (x-y)\cdot(1,2)$

$= sp\{(1,2)\}$

באופן כללי דרך יותר אלגוריתמית למציאת $\operatorname{Im}T$ היא:

עפ"י משפט ההגדרה אם ידועה התמונה של איברי הבסיס אז ידועה ההעתקה.

כלומר $\operatorname{Im}T$ נקבעת עפ"י התמונה של איברי הבסיס

> לכן אם: $T:V\to W$ ו- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל- V אזי
>
> $$\operatorname{Im}T = sp\{T(v_1),\,T(v_2),\,\dots,\,T(v_n)\}$$

ולכן לדוג' בדוג' הקודמת אם נעשה בשיטה זו גם נקבל אותו הדבר

ניקח בסיס ל-$\mathbb{R}^2$: $\{\binom{0}{1},\binom{1}{0}\}$ אזי

$\operatorname{Im}T = sp\{T\binom{0}{1},\,T\binom{1}{0}\} = sp\{(-1,-2),\,(1,2)\} = sp\{(1,2)\}$

(2)

קט״פ

מצא בסיס ומימד ל- kerT, ImT . $T(V)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}V$ ע״י המוגדרת $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (2)

פתרון:

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix} \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} y &= -2z \\ x &= -3z-2y = -3z+4z = z \end{aligned}$$

ברור ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת״ל (יש בה רק וקטור אחד $\neq 0$)

ועפ״י הנ״ל היא פורשת

$\Leftarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- kerT , $\dim \ker T = 1$

עבור ImT:

$$ImT = sp\left\{ T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} =$$

$$= sp\left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} =$$

$$= sp\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק איזה מהווקטורים ת״ל באחרים ונוריד אותם:

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ ניתן להוריד את $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\Leftarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- ImT

$\dim ImT = 2$

(<u>הערה:</u> יצא $ImT=\mathbb{R}^2$)

<u>משפט:</u> $T: V \to W$ העת״ל. אזי:

(1) T חח״ע $\iff \ker T = \{\vec{0}\}$

(2) T על $\iff ImT = W$

בס״ד

עבור $T:V\to W$ ה״ל

משפט הדרגה:

$$\boxed{\underbrace{\dim \ker T}_{\text{Null } T} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{\text{rank } T} = \underbrace{\dim V}_{\text{מספר עמודות במטריצה}}}$$

דוג: $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ המוגדרת ע״י $T(A)=A^t$.

מצא $\operatorname{Im} T$, $\ker T$.

פתרון:

$$\ker T = \{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : T(A)=0\}$$

$$= \{A : A^t = 0\} = \{\overset{\text{מטריצה}}{0}\}$$

$$\Leftarrow \quad \dim \ker T = 0$$

עבור $\operatorname{Im} T$: עפ״י משפט הדרגה:

$$\underbrace{\dim \ker T}_{=0} + \dim \operatorname{Im} T = \underbrace{\dim \mathbb{R}^{n\times n}}_{=n^2}$$

$$\Leftarrow \quad \dim \operatorname{Im} T = n^2$$

בנוסף
$$\left.\begin{cases} \operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \\ \dim \mathbb{R}^{n\times n} = n^2 \text{ !} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^{n\times n}$$

כי: $U\subseteq W$, $\dim U = \dim W$ אזי $U=W$

⟨ הערה: T מ- V לעצמו נקראת גם "אופרטור לינארי" ⟩

תרגיל: $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

צ"ל T חח"ע $\iff$ T על

הוכחה:

($\Leftarrow$) T חח"ע $\Rightarrow \ker T = 0 \Rightarrow \dim\ker T = 0$

לכן עפ"י משפט הדרגה $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$

וגם $\operatorname{Im} T \subseteq V$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T = V$$

ולכן T על.

($\Rightarrow$) בבית

תרגיל: ① האם יש העתקה $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ כך ש- $\ker T = \operatorname{Im} T$?

② האם יש העתקה $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ כך ש- $\ker T = \operatorname{Im} T$?

פתרון: ① לא. כי נניח בשלילה שכן אז בפרט עבור T כזו גם

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim\ker T \overset{\text{סמן}}{=} X$$

כעת, עפ"י משפט הדרגה

$$\underbrace{\dim\ker T}_{X} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{X} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^5}_{5}$$

$$\Rightarrow 2X = 5 \Rightarrow X = 2\tfrac{1}{2}$$

סתירה! כי המימד תמיד מס' שלם.

② יש. לדוג':

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ z-w \\ z-w \end{pmatrix}$$

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ z-w \\ z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{matrix} x-y=0 \\ z-w=0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \end{pmatrix} \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} z = w \\ x = y \end{matrix} \right]$$

$$\mathrm{Im}\,T = sp\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\} = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\Leftarrow$ $\mathrm{Im}\,T = \ker T$ ✓

תרגיל: האם קיימת העת"ל $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת

$$\ker T = \mathrm{Im}\,T = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אם כן, מצאו אותה מפורשות.

פתרון: ניקח את הבסיס הסטנדרטי.

העת"ל נקבעת ע"פ תמונות איברי הבסיס (ע"פ משפט ההגדרה) ולכן מספיק להחליט לאן שולחים את איברי הבסיס. אז נבנה העתקה:

$T(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$

כי רוצים $(1,0,0,0) \in \ker T$ ש- $(0,0,0,1)$

$T(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$T(0,1,0,0) = (1,0,0,0)$

$T(0,0,1,0) = (0,0,0,1)$

קיימות כאלו כי יכלנו לבחור ב- עוד הרבה אפשרויות כדי שה- $\mathrm{Im}\,T$ עדיין תישאר מה שרצינו.

ונמצא T מפורשות:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \underset{\text{העת"ל } T}{=}$$

$$= x\underbrace{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=0} + yT\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + w\underbrace{T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=0} = y\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}y\\0\\0\\z\end{pmatrix}$$

קס"פ

<u>תרגיל</u>: הוכח/הפרך: $S,T: V \to V$ הע"ל, $\ker T = \ker S$, $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Im}\,S$

אזי $S \equiv T$

<u>הפרכה</u>: ניקח את T כמו בדוג' הקודמת. ושם $\ker T = \mathrm{Im}\,T = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ואת S להיות הע"ל המוגדרת ע"י:

$$S\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

כאן ברור $\ker S = \ker T = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\mathrm{Im}\,S = sp\left\{S\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, S\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, S\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, S\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Im}\,T$$

אבל $S \not\equiv T$ כי לדוג'

$$S\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

<u>שאלה שמופיעה הרבה במבחנים</u>: (או סגנון דומה)

נתונה $T: V \to V$ אידמפוטנטית ז"א $T^2 = T$

(א) הוכח/הפרך $T = \underbrace{I}_{\text{העתקת הזהות}}$ או $T = -I$

(ב) $\ker T \oplus \mathrm{Im}\,T = V$

<u>פתרון</u>: ← ט"מ הבא

7

פתרון: (א) הפרכה: ניקח $T \equiv 0$ ז"א לכל v $T(v)=0$

אזי $T^2 \equiv T$

כי לכל $v \in V$ מתקיים $T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$

$T(v) = 0$ ✓

אבל $-I \neq T \neq I$

(ב) כדי להוכיח סכום ישר צ"ל (I) $\ker T + \operatorname{Im} T = V$

(II) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

(I) נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית:

($\subseteq$) ברור כי $\ker T, \operatorname{Im} T \subseteq V$ ולכן גם הסכום שלהם

($\supseteq$) ניקח $v \in V$ ונוכיח שניתן לרשום אותו כסכום של וקטור מ-$\ker T$ עם וקטור מ-$\operatorname{Im} T$

ואכן

$$v = \underbrace{\left(v - T(v)\right)}_{\in \ker T} + \underbrace{T(v)}_{\in \operatorname{Im} T}$$

כי

$T\left(v - T(v)\right) =$
$= T(v) - T^2(v) = 0$
מ נתון $T = T^2$

(II) נוכיח $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{\vec{0}\}$

נניח בשלילה שיש $0 \neq w \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$

(*) $w \in \ker T \Leftarrow T(w) = 0$

$w \in \operatorname{Im} T \Leftarrow$ קיים v כך ש- $T(v) = w$ ולכן $T^2(v) = T(w)$

נפעיל T על שני הצדדים.

בנוסף כיוון ש- $T^2 = T$ אז בפרט $T^2(v) = T(v)$

$T(v) = T(w)$

סה"כ קיבלנו $w = T(v) \overset{\text{עפ"י}}{=} T(w) \underset{(*)\text{עפ"י}}{=} 0$

הנחנו $w \neq 0$

סתירה!