תרגול 5

17 בנובמבר 2015

טענה 0.1 $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ כאשר a_n היא סדרה ששואפת לאינסוף.

תרגיל: חשבו את הגבול של $a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{4n^2-1}$

פתרון: נרצה להשתמש בטענה הקודמת, לכן נרצה לשנות את הביטוי בסוגריים וגם במעריך:

נתבונן קודם בביטוי שבתוך הסוגרים:

$$\frac{n^2-2}{n^2-1}=\frac{n^2-1-1}{n^2-1}=\frac{n^2-1}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-1}=1-\frac{1}{n^2-1}=1+\frac{1}{-(n^2-1)}$$

עכשיו כדי להשתמש בלמה הקודמת נרצה לשנות גם את במעריך, נרצה שהוא יהי מהצורה $k\left(-\left(n^2-1\right)\right)+t$ כאשר k,t הם מספרים כלשהם:

$4n^2-1=4n^2-4+3=4\left(n^2-1\right)+3=-4\left(-\left(n^2-1\right)\right)+3$ וסה"כ נקבל:

$$\left(1+\frac{1}{-(n^2-1)}\right)^{-4\left(-\left(n^2-1\right)\right)+3}=\left(\left(1+\frac{1}{-(n^2-1)}\right)^{-\left(n^2-1\right)}\right)^{-4}\left(1+\frac{1}{-(n^2-1)}\right)^{3}\longrightarrow e^{-4}$$

הסבר: הביטוי שבסוגריים הראשונים שואף ל־e כי אם נסמן $a_n=-\left(n^2-1\right)$ אז נוכל להשתמש בטענה הקודמת ולכן ולכן הביטוי הראשון שואף ל־e^{-4}, ברור שהביטוי השני שואף ל־1 ולכן לפי אריטמטיקה של גבולות נקבל שכל הגבול שווה ל־e^{-4}.

תרגיל : חשבו את הגבול של $a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון: גם כאן נרצה להשתמש בטענה הקדמת, נתבונן קודם כל בביטוי שבסוגריים:

$$\frac{2n^3-1}{2n^3+3}=\frac{2n^3+3-4}{2n^3+3}=\frac{2n^3+3}{2n^3+3}-\frac{4}{2n^3+3}=1+\frac{1}{\left(-\frac{2n^3+3}{4}\right)}$$

ולכן אם נסמן את הסדרה שלנו ב־$a_n=-\frac{2n^3+3}{4}$ אז נרצה לשנות את המעריך כל שיהיה מהצורה $k\left(-\frac{2n^3+3}{4}\right)+t$ כאשר k,t מספרים כלשהם.

$$3n^3+4=\frac{4}{4}\left(3n^3+3\right)+1=\frac{3\cdot 2}{4}\left(2n^3+2\right)+1=\frac{6}{4}\left(2n^3+3-1\right)+1=\frac{6}{4}\left(2n^3+3\right)-\frac{1}{2}=-6\left(-\frac{1}{4}\left(2n^3+3\right)\right)-\frac{1}{2}$$

סה"כ נקבל:

$$\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{2n^3+3}{4}\right)}\right)^{-6\left(-\frac{1}{4}\left(2n^3+3\right)\right)-\frac{1}{2}}=\left(\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{2n^3+3}{4}\right)}\right)^{-\frac{2n^3+3}{4}}\right)^{-6}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{2n^3+3}{4}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow e^{-6}$$

כמו בתרגיל הקדום הביטוי שבסוגרים שואף ל־e ולכן כל הביטוי שואף ל־e^{-6} הביטוי השני שואף ל־1 ולכן לפי משפט הסנדוויץ המכפלה שואפת ל־e^{-6}.

טורים

הגדרה 0.2 תהי $\{a_n\}$סדרה ולכל N יהי $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_N$, הסדרה $\{S_N\}$ נקראת סדרת הסכומים החלקיים של הטור והסימן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא הטור נמתאים

לסדרה $\{a_n\}$ול-a_n נקרא איבר הכללי של הטור. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים הלקיים שלו מתכנסת, ושניהם מתכנסים לאותו הגבול שנקרא סכום הטור, כלומר $limS_N = S$ אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. אם נוכל למצוא את הגבול של סדרת הסכומים החלקיים זה אומר שנמצא את סכום הטור.

משפט 0.3 אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר ממשי אזי $a_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

הערה 0.4 המשפט הקודם מהווה תנאי הכרחי אך אינו מספיק לקיום הגבול, למשל $\frac{1}{n} \to 0$ אבל הטור $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

משפט 0.5 דוגמה: 1) $\sum \frac{1}{n}$ טור מתבדר (נקרא טור הרמוני)
2) $\sum \frac{1}{n^2}$ טור מתכנס.

סיכומון: כדי להחליט האם הטור מתכנס ולמצוא את סכומו נבצע את השלבים הבאים:

א) נבדור האם האיבר הכללי a_n שואף לאפס, אם לא אזי הטור מתבדר ואחרת נעבור לשלב ב'

ב) ננסה למצוא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים , אם הצלחנו אזי נחשב את הגבול שלה והגבול הזה יהיה בדיוק סכום הטור.

תרגיל: בדקו את התכנסות הטורים הבאים ומצאו את סכומם במידה והטור מתכנס.

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$

פתרון: נבקום האם האיבר הכללי של הטור שואף לאפס: $lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$ ולכן נסיק שהטור אינו מתכנס.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

פתרון: נבדוק האם האיבר הכללי של הטור שואף לאפס: $lim_{n\to\infty} ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = lim\left(ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = ln1 = 0$ ולכן תנאי הכרחי לקיום הגבול מתקיים . נמשיך לשלב הבא:

ננסה למצוא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים הלקיים

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \left(ln\left(n+1\right) - ln\left(n\right)\right) = ln\left(N+1\right) - ln1 = ln\left(N+1\right)$$
$$ln2 - ln1 + ln3 - ln2 + ln4 - ln3 + \ldots + ln\left(N+1\right) - ln\left(N\right) =$$

מצאנו את האיבר הכללי של סדרת הסכומים הלקיים כאט נחשב את הגבול שלה $lim_{N\to\infty} S_N = lim_{N\to\infty} ln\left(N+1\right) = \infty$ ולכן סדרת הסכומים הלקיים של הטור מתבדרת ולכן הטור שלנו נתבדר.

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n^2+1)}$

פתרון: קל לראות שהאיבר הכללי של הטור שואף לאפס (בדקו) ולכן ננסת למצוא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים החלקיים, בשביל זה נסדר את הביטוי:

ראינו לפני כמה שיעורים ש- $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ולכן $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 =$
$$\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

ולכן $\frac{2n+1}{n^2(n^2+1)} = \frac{2n+1}{n^2} + \frac{2n+1}{(n+1)^2} - \frac{4n+2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2} - (4n+2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$
$$-\frac{4n}{n} + \frac{4n+4}{n+1} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

כעט נמצא את האיבר הכללי של סדרת הסכומים הלקיים: $S_N = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} +$
$$\frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$$

כעט נחשב את הגבול של S_N: $lim_{N\to\infty} S_N = lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right) = 1$ לכן הטור נתכנס והסכום שלו הוא 1.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

הקדמה: בהרבה מקרים מאוד קשה לחשב את סכום הטור ולכן לפעמים אנחנו נסתפק בכל שרק נבדוק האם הטור מתכנס או לא, ובשביל זה יש לנו מבחני בתכנסות לטורים.

הגדרה 0.6 טור $\sum a_n$ נקרא טור חיובי אם עבור כל $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$.

הערה 0.7 במבחני התכנסות ניתן להשתמש רק עבור טורים חיוביים.

הגדרה 0.8 (מבחן המנה או מבחן דלמבר): יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

א) אם $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הטור מתכנס

ב) אם $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ הטור נתבדר

ג) אם $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ אי אפשר להרכיע

לדוגמה: נבדור את התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$ לפי מבחן המנה

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)2^{n+2}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{(n+1)2^n}{n!}\right)} = \frac{2(n+2)}{(n+1)^2} \to 0 < 1$ ולכן לפי מבחן המנה הטור אינו נתכנס.

שימו לב: כאן לא בדקתי האם האיבר הכללי שואף לאפס או לא משום שלא היה צורך משום שיכלנו לפי משפט המנה להחליט האם הטור מתכנס. אבל לפעמים יש מקרים בהם $lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

במקרים כאלה מבחן המנה לא נותן תשובה האם הטור מתכנס או מתבדר ואז אפשר כמובן לבדוק האם האיבר הכללי שואף לאפס או אפשר לנסות את מבחן ההתכנסות אחר.

הגדרה (מבחן השורש של קושי): יהי $\sum a_n$ טור חיובי ונניח ש-$lim\sqrt[n]{a_n} = L$ אזי:

א) אם $L < 1$ אז הטור נתכנס

ב) אם $L > 1$ אזי הטור נתבדר

ג) אם $L = 1$ אזי אי אפשר להכריע

דוגמה: נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(ln3)^n}$ לפי מבחן קושי:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{(ln3)^n}} = lim\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{ln3} = \frac{1}{ln3} < 1$ לכן הטור נתכנס לפי מבחן השורש .

תרגיל: בדור האם כל אחד מהטורים הבאים מתכנסים או נתבדרים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(lnn)^n}$

פתרון: משתמש במבחן השורש של קושי:

$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(lnn)^n}} = lim\frac{1}{ln(n)} = 0 < 1$ ולכן לפי מבחן השורש הטור הנתון נתכנס.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ עבור $a > 0$

פתרון: כאן משתמש במבחן המנה : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$ ולכן הטור נתכנס לפי מבחן המנה.

הערה 0.9 באופן כללי אם יש לנו $n!$ בביטוי של האיבר הכללי של הטור עדיף לנסות קודם את מבחן המנה.

ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

פתרון: נשתמש במבחן השורש של קושי: $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$ ולכן הטור נתבדר.

ד) $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

פתרון: משתמש במבחן המנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+1)!(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$ ולכן הטור מתכנס.

ה) $\sum \frac{n!}{n^n}$

פתרון: נשתמש במבחן המנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n =$
$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e^{-1} < 1$
ולכן הטור מתכנס לפי מבחן המנה.

ו) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

פתרון: נשתמש במבחן המנה:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2\cdot n\cdot n^2}{(n+1)^n(n+1)} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2}{e} < 1$ ולכן הטור מתכנס.

ז) $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$

פתרון: נשתמש במבחן המנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n)^n}{3^n n!} = \frac{3^n\cdot 3(n!)(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)3^n n!} =$
$\frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 3e^{-1} > 1$ ולכן הטור נתבדר.

הגדרה 0.10 (מבחן ההשוואה הראשון): יהי $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים ונניח שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n \leq b_n$.

א) אם $\sum b_n$ מתכנס אזי גם $\sum a_n$ מתכנס

ב) אם $\sum a_n$ מתבדר אזי גם $\sum b_n$ מתבדר.

דוגמה: נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, מתקיים החל מ־$n = 4$: $< \frac{1\cdot 2\cdots n}{n^n} = \frac{n!}{n^n}$ $\frac{2}{n^2} = \frac{2n^{n-2}}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot n\cdots n}{n^n}$ אבל הטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן הטור שלנו מתכנס.

הגדרה: (מבחן השורש של קושי) יהיו $\sum a_n$, $\sum b_n$ שני טורים חיוביים ונניח ש־$lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ אזי:

א) אם $0 < L < \infty$ אזי שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד, (נאמר הטורים האלה הם חברים)

ב) אם $L = 0$ אזי מהתכנסות דל $\sum b_n$ נובעת נתכסנות של $\sum a_n$

ג) אם $L = \infty$ אזי מהתכנסות של $\sum a_n$ נובעת התכנסות של $\sum b_n$

דוגמאות:

א) נתבונן בטור $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ נשווה אותו עם הטור $\sum \frac{1}{n}$ שידוע כי טור מתבדר

<

$$lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 < \infty$$

ולכן הטורים הם חברים ולכן מתבדרים ביחד כלומר הטור שלנו הוא טור מתבדר.

ב) מתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}$ ונשווה אותו עם הטור $\sum \frac{1}{n^3}$, וההסבר לזה הוא שהמונה מתנהג כמו n^2 וכמחנה מתנה כמו n^5 ולכן כל השבר מנהג כמו $\frac{1}{n^3}$.

$$lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{32} < \infty$$

ולכן הטורים הם חברים ולכן מתכנסים יחד אבל הטור $\sum \frac{1}{n^3}$ הוא טור מתכנס אפשר לראות את זה לפי מבחן ההשוואה הראשון, אפשר להשוות עם $\sum \frac{1}{n^2}$, ולכן הטור שלנו הוא טור מתכנס.

הערה חשובה: לא הספקנו את מבחני השוואה בתרגול.