ב"א אנליזה 1 תשפב מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin^{6}(x)}{1-\cos\left(x^{3}\right)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\sin^{6}(x)}{1-\cos\left(x^{3}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{x}\frac{\sin^{6}(x)}{x^{6}}\cdot\frac{x^{6}}{1-\cos\left(x^{3}\right)}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2=2$$

כאשר נעזרים בכך ש $\lim_{x\to 0}\frac{x^{6}}{1-\cos(x^{3})}$ מחושב בעזרת

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{1-\cos\left(x\right)}=2$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}-x^{2}}{x^{3}+1}$

פתרון: נכפיל בצמוד

$$\frac{\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}-x^{2}}{x^{3}+1}=\frac{\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}-x^{2}}{x^{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}+x^{2}}{\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}+x^{2}}=\frac{x^{6}+x^{3}+1-x^{4}}{\left(x^{3}+1\right)\left(\sqrt{x^{6}+x^{3}+1}+x^{2}\right)}$$

הגורם המשמעותי במונה והמכנה הוא x^{6} (במונה הוא כתוב מפורשות ובמכנה הוא מתקבל מהכפל של x^{3} ב $\sqrt{x^{6}}$) והמקדם שלו גם במונה וגם במכנה הוא אחד ולכן הגבול שווה ל $1=\frac{1}{1}$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n}+5^{n}}{3^{n}+4^{n}}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_{n}=n!+1$ ואז

$$\frac{2^{n}+5^{n}}{3^{n}+4^{n}}=\frac{5^{n}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n}+1\right)}{4^{n}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+1\right)}=\left(\frac{5}{4}\right)^{n}\cdot\frac{\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n}+1\right)}{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+1\right)}\to\infty\cdot\frac{1}{1}=\infty$$

בהסתמך על כך שעבור q חיובי מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty}q^{n}=\begin{cases}0 & q<1\\ 1 & q=1\\ \infty & q>1\end{cases}$$

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-ax+a}{x-2} & x\neq 2\\ b & x=2\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a,b הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=2$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=2$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-ax+a}{x-2}=b$$

נשים לב ש

$$x^2-x-ax+a=x\left(x-1\right)-a\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(x-a\right)$$

ולכן לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-1\right)\left(x-a\right)}{x-2}=\begin{cases}1 & a=2\\ =\left\{\frac{\neq 0}{0}\right\}=\pm\infty & a\neq 2\end{cases}$$

ולכן רק עבור $a=2$ קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to 2}f(x)$ ושווה ל 1. לכן הפונקציה רציפה רק עבור $a=2$ ו $b=1$.

(ב) לאילו ערכי a,b הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=2$? מהי $f'(2)$ במקרים אלה?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=2,b=1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=2$) אם f גזירה ב $x=2$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}1=1$$

כלומר f גזירה ב $x=2$ עבור $a=2,b=1$ ומתקיים $f'(2)=1$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ לכל n וכן $a_1=\frac{1}{e}$.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n עולה.

פתרון: נוכיח באינדוקציה כי $0<a_n<1$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $0<a_1=\frac{1}{e}<1$.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $0 < a_n < 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $0 < a_{n+1} < 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$$

מכיוון שההנחה היא ש $0 < a_n < 1$ אז גם $0 < \sqrt{a_n} < 1$.

כעת כיוון שלכל n מתקיים $\sqrt{a_n}$ אזי $a_n < \sqrt{a_n} = a_{n+1}$ שזה אומר שהסדרה עולה.

(ב) חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: קיבלנו בסעיף קודם שכל איברי הסדרה קטנים מ 1 והסדרה עולה. לכן לפי משפט הסדרה מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$$

כלומר $\sqrt{L} = L$. שני האגפים אי שליליים (כי איברי הסדרה חיובים ולכן הגבול גדול שווה מ 0) לכן נוכל לעלות בריבוע ולקבל

$$L^2 = L$$

והפתרונות למשוואה הן $0, 1$. כיון שהסדרה עולה ו $0 < a_1$ הגבול לא יכול להיות 0 ולכן קיבלנו שהגבול הוא $L = 1$.

.4

(א) מצאו את הערך המינימאלי של $f(x) = x\ln(x) - 3x$.

פתרון: נגזור את הפונקציה בתחום הגדרתה ($x > 0$)

$$f'(x) = \ln(x) + 1 - 3 = \ln(x) - 2$$

ומתקיים ש $f'(x) = 0$ אם ורק אם

$$\ln(x) = 2$$

והפתרון היחיד למשוואה הוא $x = e^2$. ונסתכל בטבלה

x	1	e^2	e^3
$f'(x)$	$-$	0	$+$

להסיק כי f יורדת ממש בקטע $\left(0, e^2\right)$ ועולה ממש בקרן $\left(e^2, \infty\right)$ ולכן הנקודה $x = e^2$ היא נקודת מינימום יחידה והערך בה הוא

$$f(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$$

(ב) לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x\ln(x) = 3x + a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$g(x) = f(x) - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה נקודות חיתוך יש ל $g(x)$ עם ציר x. כיוון ש g ו f נבדלים בקבוע יש להם אותם תחומי עליה/ירידה ואותה נקודת קיצון. לאור סעיף קודם נסיק כי ל g יכולה להיות לכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(0,e^2\right)$ ולכל היותר נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(e^2,\infty\right)$ ואולי רק ב $g(e^2)=-e^2-a$. נחשב ולכן עבור $a=-e^2$ תהיה נקודת חיתוך יחידה (הנקודה e^2 היא נקודת מינימום ומימין ומשמאל לנקודה ערכי הפונקציה רק יותר גדולים). בנוסף לכל $a<-e^2$ נקבל שהערך המינימאלי של g הוא $g(e^2)>0$ ולכן היא לא תחתוך את ציר x באף נקודה.

עבור $a>-e^2$ נחשב מה קורה בקצוות:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln(x)-3x-a=-a$$
$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}x\ln(x)-3x-a=\lim_{x\to\infty}x\left(\ln(x)-3\right)x-a=\infty$$

כאשר מסתמכים על כך ש

$$\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

ולכן:

- תמיד תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(e^2,\infty\right)$ כי $g(e^2)<0$ (אנחנו במקרה ש $a>-e^2$) וקיימת נקודה $e^2<c$ בה $g(c)>0$ (כי $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$) ומכיוון ש g פונקציה רציפה תהיה לה נקודת חיתוך עם ציר x (ויכולה להיות לכל היותר אחת כי g עולה ממש בקטע זה ולכן יש לה בדיוק נקודה אחת).
- תהיה נקודת חיתוך יחידה בקטע $\left(0,e^2\right)$ אם ורק אם $0<-a$ (או $a<0$). כי במקרה ש $a<0$ נקבל ש $g(e^2)<0$ (אנחנו במקרה ש $a>-e^2$) וקיימת נקודה $0<c<e^2$ בה $g(c)>0$ (כי $\lim_{x\to0^+}g(x)=-a>0$) ומכיוון ש g פונקציה רציפה תהיה לה נקודת חיתוך עם ציר x (ויכולה להיות לכל היותר אחת כי g יורדת ממש בקטע זה ולכן יש לה בדיוק נקודה אחת). במקרה ש $0\leq a$ נקבל ש $\lim_{x\to0^+}g(x)\leq0$ ומכיוון ש g יורדת ממש בקטע $\left(0,e^2\right)$ לא תהיה אף נקודה בה $g(x)=0$.

לסיכום:

- עבור $a=-e^2$ יהיה פתרון יחיד.
- עבור $a<-e^2$ לא יהיה פתרון.
- עבור $-e^2<a<0$ יהיו שני פתרונות.
- עבור $0\leq a$ יהיה פתרון יחיד.

5. תהא f גזירה לכל $x\neq0$, כך שקיים גבול סופי $\lim_{x\to0}f(x)$.

(א) הוכיחו או הפריכו: גם הגבול החד צדדי $\lim_{x\to0^+}f'(x)$ קיים וסופי.

פתרון: הפרכה: נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

והיא רציפה (גם ב $x=0$ שהרי $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow{x\to0}0$ כאפסה כפול חסומה). והיא גזירה לכל $x\neq0$ ונגזרתה היא

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

נניח בשלילה כי קיים הגבול החד צדדי $\lim_{x\to0^+} f'(x)$ והוא סופי אזי קיים הגבול החד צדדי $\lim_{x\to0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (שהרי קיים הגבול

$$\lim_{x\to0^+} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

כאפסה כפול חסומה. וחיסור של שני פונקציות שיש להם גבול גם היא פונקציה שיש לה גבול). אבל:

$$a_n=\frac{1}{2\pi n}\to0$$
$$b_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to0$$

שני סדרות ששואפות ל 0 מצד ימין/החיובי אבל

$$\cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n}\right)}\right)=\cos\left(2\pi n\right)=1\to1$$
$$\cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)}\right)=\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=0\to0$$

שני גבולות חלקיים שונים ולכן לא קיים הגבול $\lim_{x\to0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. סתירה.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $f(0)=\lim_{x\to0} f(x)$ אז f גזירה ב $x=0$.

פתרון: הפרכה:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq0\\ -x & x<0\end{cases}$$

היא רציפה אך אינה גזירה ב $x=0$ שהרי

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-0}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x-0}{x}=-1$$

ושני הגבולות משני הצדדים שונים.