טורים חיוביים

מבחני השוואה

<u>מבחן השוואה ראשון:</u> אם $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך שהחל מ- n מסוים $a_n \ge b_n$ אזי:
1. אם $\sum a_n$ מתכנס, גם $\sum b_n$ מתכנס.
2. אם $\sum b_n$ מתבדר, גם $\sum a_n$ מתבדר.

<u>תרגיל:</u> קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}$.

<u>פתרון:</u> ראשית נשים לב כי $\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)>0$ לכל $n \ge 2$, כי $0<\frac{\pi}{n^2}\le\frac{\pi}{4}$ לכן $0\le\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)\le\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{\pi}{2}=1$.

לכן החל ממקום מסוים $0<\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}<\frac{1}{n^2}$, לכן לפי מבחן השוואה ראשון כיוון ש- $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס (כפי שראינו לפני כמה תרגולים) גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2}$ מתכנס.

<u>תרגיל:</u> קבעו התכנסות או התבדרות של .

<u>פתרון:</u> מתקיים $0<\frac{5+3(-1)^n}{7^n}<\frac{8}{7^n}$. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3(-1)^n}{7^n}$ מתכנס כי מתכנס כי הוא טור הנדסי.

<u>מבחן השוואה שני:</u> אם $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים וקיימים $\alpha, \beta>0$ כך שהחל מ- n מסוים מתקיים $\alpha<\frac{a_n}{b_n}<\beta$, אז הטורים מתכנסים ומתבדרים ביחד. (בפרט אם הגבול $\lim \frac{a_n}{b_n}$ קיים במובן הצר וגדול מ-0).

<u>תרגיל:</u> קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

<u>פתרון:</u> $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)}$. נשים לב כי הסוגריים בצד ימין של המכנה שואפים ל- 2. הגיוני לנסות להשוות ל- $\frac{1}{\sqrt{n}}$ המתבדר (ראינו שהוא מתבדר,לחלופין הוא מתבדר לפי מבחן השוואה ראשון כי $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$).

אי אפשר להשתמש במבחן השוואה ראשון (מקבלים את הכיוון הלא נכון). נשתמש במבחן השוואה השני:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\to\frac{1}{2}$$

לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד, לכן הטור המקורי שלנו מתבדר.

<u>תרגיל:</u> קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

פתרון: נבצע מבחן השוואה שני עם הטור ההרמוני $\sum b_n, b_n=\frac{1}{n}$:

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to\frac{1}{1}=1$ לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד. כיוון שהטור ההרמוני מתבדר גם הטור שלנו מתבדר.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)(4n-5)}$.

פתרון: לפי חזקות גבוהות רואים שכדאי להשוות עם הטור ההרמוני:

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2}{(2n+3)(4n-5)}\to 1$ לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים ביחד, כלומר הטור שלנו מתבדר.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}$.

פתרון: הרעיון הוא שאם נסתכל רק על חזקות גבוהות נקבל כי הטור הוא "בערך" כמו $\sum\frac{1}{n^3}$ לכן כדאי לבצע מבחן השוואה שני עם הטור $\sum b_n, b_n=\frac{1}{n^3}$. שימו לב כי $\sum\frac{1}{n^3}$ מתכנס לפי מבחן השוואה ראשון (השוואה עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ שראינו כי הוא מתכנס). לכן:

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^3\sqrt[7]{n^{14}+20n+1}}{(1+2n)^5}=\frac{\sqrt[7]{1+\frac{20}{n^{13}}+\frac{1}{n^{14}}}}{(\frac{1}{n}+2)^5}\to\frac{1}{2^5}>0$ כלומר הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד, לכן כאמור הטור המקורי שלנו מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות או התבדרות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$

פתרון:

$\frac{n!}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}<\frac{1}{n^3}$. הטור $\sum\frac{1}{n^3}$ מתכנס (נימקנו בתרגיל לעיל) לכן לפי מבחן השוואה ראשון הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+3)!}$ גם כן מתכנס.

מבחני קושי ודלאמבר

מבחן קושי. יהי $\sum a_n$ טור חיובי ממש.

- אם $\limsup\sqrt[n]{a_n}<1$ הטור מתכנס.
- אם $\limsup\sqrt[n]{a_n}>1$ הטור מתבדר.
- אם $\limsup\sqrt[n]{a_n}=1$ לא ניתן להסיק דבר.

מבחן דלאמבר. יהי $\sum a_n$ טור חיובי ממש.

- אם $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ הטור מתכנס.
- אם $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ הטור מתבדר.

שימו לב: קושי יותר חזק מדלאמבר, אבל לעיתים דלאמבר יותר קל לשימוש.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum \frac{n^3}{\ln^n 3}$.

פתרון לפי קושי:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n^3}{\ln^n 3}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3}\to\frac{1}{\ln 3}<1$$

לכן גם גבול עליון קטן מ- 1 , לכן הטור מתכנס.

פתרון לפי דלאמבר:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{\ln^{n+1}3}}{\frac{n^3}{\ln^n 3}}=\frac{\ln^n 3\cdot(n+1)^3}{\ln^{n+1}3\cdot n^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3\cdot\ln 3}\to\frac{1}{\ln 3}<1$$, לכן גם גבול עליון קטן מ-1, לכן הטור מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$.

פתרון: בתרגילים עם עצרת לרוב כדאי להשתמש בדלאמבר:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{(n+2)2^{n+1}n!}{(n+1)(n+1)!2^n}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\to 0<1$$ לכן הטור מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$.

פתרון: לפי קושי $\sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^n}}=\frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n}\to 0<1$ לכן הטור מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum \frac{a^n}{n!}$ כאשר $a>0$.

פתרון: לפי דלאמבר $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\frac{a^{n+1}n!}{a^n(n+1)!}=\frac{a}{n+1}\to 0<1$ לכן הטור מתכנס.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum \frac{(-1)^n+5}{3^n}$.

פתרון: לפי קושי:

$\sqrt[n]{\frac{(-1)^n+5}{3^n}}=\frac{\sqrt[n]{(-1)^n+5}}{3}$. כעת $4\le(-1)^n+5\le 6$ לכן $\sqrt[n]{4}\le\sqrt[n]{(-1)^n+5}\le\sqrt[n]{6}$ לכן לפי סנדוויץ' $\sqrt[n]{(-1)^n+5}\to 1$

לכן $\sqrt[n]{a_n}\to\frac{1}{3}$ לכן מתכנס לפי קושי.

תרגיל: קבעו התכנסות/התבדרות $\sum a_n$ באשר $a_n=\begin{cases} \frac{1}{2^n n} & n=2k \\ \frac{1}{2^{n-1}(n+1)} & n=2k+1 \end{cases}$.

פתרון: ננסה ראשית לפי דלאמבר.

עבור n זוגי נקבל $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^n(n+2)}}{\frac{1}{2^n n}}=\frac{2^n n}{2^n(n+2)}=\frac{n}{n+2}\to 1$.

ועבור n איזוגי נקבל $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}}=\frac{2^{n-1}(n+1)}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{4}\to\frac{1}{4}$. אלה 2 תתי סדרות מתכנסות שמכסות את כל הסדרה לכן לפי נימוקים דומים שראינו בעבר, אין גבולות חלקיים אחרים, לכן אלה הם גם ה- $\lim\inf$, $\lim\sup$.
בכל אופן אף אחד מהם לא נותן לנו אינפורמציה, לכן מבחן דלמבר לא עבד.

ננסה כעת לפי קושי, נקבל עבור n זוגי $\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}=\frac{1}{2\sqrt[n]{n}}\to\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ ועבור n איזוגי גם כן $\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}}=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}\sqrt[n]{n+1}}\to\frac{1}{2}$.

לכן הסדרה כולה מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$ ובפרט הגבול העליון הוא $\frac{1}{2}<1$ לכן לפי קושי הטור שלנו מתכנס.

זנבות

משפט: אם טור מתכנס אז הזנבות שלו r_m שואפים לאפס: $r_m\to 0$.

תרגיל: חשבו בדיוק של 0.001 את סכום הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

פתרון:

נמצא את ה- n המינימאלי עבורו $r_n<0.001$. נחשב:

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right)<$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...\right)=\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}<0.001$$

זה מתקיים עבור $n\geq 6$ (בדיקה ע"י הצבה) לכן מספיק לחשב את סכום 7 האיברים הראשונים (הטור מתחיל מ- $n=0$):

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2.718$$