מבנים דיסקרטיים – תרגיל 4 – פתרון

כל סעיף שווה 10 נקודות.

שאלה 1

בכל סעיף נתונות שתי חבורות G,H ופונקציה $f: G \to H$. עליכם לקבוע אם f הומומופיזם \ איזומורפיזם \ אף אחד מהם. (אין צורך להוכיח כי G,H חבורות).

א. $G = (\mathbb{C}^*,\cdot),\ \ H = (\mathbb{R}^*,\cdot)$ (תזכורת: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ו-$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ו-$H$ ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f(z) = |z|$.

ב. $G = (\mathbb{R},+),\ \ H = (\mathbb{Z},+)$ ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (כאשר $\lfloor x \rfloor$ אומר עיגול כלפי מטה של x).

ג. $G = H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ (הכפל ב-G וב-H הוא כפל מטריצות) ו-$f: G \to H$ מוגדרת ע"י $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

פתרון

סעיף א: לכל $z,w \in \mathbb{C}^*$ מתקיים $f(zw) = |zw| = |z| \cdot |w| = f(z)f(w)$ ולכן f הומומורפיזם. f לא איזומורפיזם כי הוא לא חד חד ערכי. לדוגמא, $f(-1) = |-1| = |1| = f(1)$.

סעיף ב: f לא הומומורפיזם כי $f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f(1) = \lfloor 1 \rfloor = 1$ אבל $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 = 0$, כלומר $f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

סעיף ג: יהיו $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \in G$. אזי

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ac & -ad-bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}$$ ו-

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & -ad-bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}$$ ולכן

$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$, כלומר f הומומורפיזם.

נראה כי f איזומורפיזם: צריך לבדוק ש-f חח"ע ועל. אפשר להראות את זה ישירות, אבל יותר קצר להראות של-f יש פונקציה הפוכה – f עצמה! באמת, $f\left(f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ולכן $f \circ f = id_G$, כלומר $f^{-1} = f$.

שאלה 2

תהי G חבורה.

א. יהי $x \in G$. הוכיחו כי הפונקציה $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = x^{-1}gx$ היא איזומורפיזם.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f: G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = g^{-1}$ היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

הוכחה

סעיף א: <u>נראה ש-f הומומורפיזם:</u> יהיו $g,h\in G$. אזי

$$f(gh)=x^{-1}ghx=x^{-1}gehx=x^{-1}g(xx^{-1})hx=(x^{-1}gx)(x^{-1}hx)=f(g)f(h)$$

ולכן f הומומורפיזם.

<u>נראה ש-f חח"ע:</u> יהיו $g,h\in G$ כך ש-$f(g)=f(h)$. אזי

$$g=ege=xx^{-1}gxx^{-1}=xf(g)x^{-1}=xf(h)x^{-1}=x^{-1}xhx^{-1}x=ehe=h$$

כלומר, $g=h$, כדרוש.

<u>נראה ש-f על:</u> יהי $g\in G$, אזי $f(xgx^{-1})=x^{-1}xgx^{-1}x=ege=g$ ולכן g נמצא בתמונה של f, כדרוש.

<u>לסיכום</u>, f הומומורפיזם חח"ע ועל ולכן איזומורפיזם. **מש"ל.**

סעיף ב: <u>כוון א:</u> נניח כי f הומומורפיזם. אזי לכל $g,h\in G$ מתקיים

$$hg=(h^{-1})^{-1}(g^{-1})^{-1}=(g^{-1}h^{-1})^{-1}=f(g^{-1}h^{-1})=f(g^{-1})f(h^{-1})=$$

$(g^{-1})^{-1}(h^{-1})^{-1}=gh$. (השוויון האדום נובע מכך ש-f הומומורפיזם).

קיבלנו ש-$gh=hg$ לכל $g,h\in G$ ולכן G אבלית. <u>מש"ל כוון א.</u>

<u>כוון ב:</u> נניח כי G אבלית, אזי לכל $g,h\in G$ מתקיים

$$f(gh)=(gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}=g^{-1}h^{-1}=f(g)f(h)$$

(בשוויון האדום השתמשנו באבליות של G). לכן, f הומומורפיזם. <u>מש"ל כוון ב.</u>

שאלה 3

תהיינה G,H חבורות ויהי $f:G\to H$ <u>הומומורפיזם</u>.

א. הראו כי לכל $g\in G$ ו-$n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $f(g^n)=f(g)^n$.

ב. נניח ש-f <u>איזומורפיזם</u>. הראו כי לכל $g\in G$ מתקיים $o(g)=o\big(f(g)\big)$.

ג. תנו דוגמא ל-G,H,f כך ש-$o(g)\neq o\big(f(g)\big)$. (כמובן שלפי סעיף ב לא ייתכן ש-f איזומורפיזם).

פיתרון

סעיף א: קודם נוכיח עבור $n>0$ ע"י אינדוקציה על n. ל-$n=1$ זה ברור. נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, אזי לכל $g\in G$ מתקיים $f(g^{n-1})=f(g)^{n-1}$. לכן, $f(g^n)=f(g\cdot g^{n-1})=f(g)f(g^{n-1})=f(g)f(g)^{n-1}=f(g)^n$, כדרוש.

אם $n<0$ אז לפי מה שהראינו מקודם $f(g^{-n})=f(g)^{-n}$ לכל $g\in G$. לכן, $f(g^n)=f((g^{-n})^{-1})=f(g^{-n})^{-1}=(f(g)^{-n})^{-1}=f(g)^n$.

לבסוף, $f(g^0)=f(e_G)=e_H=f(g)^0$ ולכן הטענה נכונה עבור $n=0$.

לסיכום, הראינו כי $f(g^n)=f(g)^n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$. מש"ל.

סעיף ב: יהי $g\in G$. <u>אנו טוענים</u> כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $g^n=e_G$ אם ורק אם $f(g)^n=e_H$. <u>באמת</u>, אם $g^n=e_G$ אז לפי סעיף א, $f(g)^n=f(g^n)=f(e_G)=e_H$. <u>מצד שני</u>, אם $f(g)^n=e_H$ אז $f(g^n)=f(g)^n=e_H=f(e_G)$. היות ו-f איזומורפיזם, היא חח"ע ולכן $g^n=e_G$.

<u>לכן</u>, לכל $g\in G$,

$$o(g)=\min\{n\in\mathbb{N}|g^n=e_G\}\cup\{\infty\}=\min\{n\in\mathbb{N}|f(g)^n=e_H\}\cup\{\infty\}=o\big(f(g)\big)$$

(השוויון האדום נובע מכך ש- $g^n=e_G$ אם ורק אם $f(g)^n=e_H$). מש"ל.

סעיף ג: נבחר $G = H = (\mathbb{Z}, +)$ ונגדיר את f ע"י $f(z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{Z}$. אזי f הומומורפיזם (בדקו!). נבחר $g = 1$. אזי $o(g) = \infty$ (כי לכל n טבעי $n \cdot g = n \cdot 1 = n \neq 0$), אבל $o(f(g)) = o(0) = 1$.

שאלה 4

תהיינה G, H חבורות ויהי $f: G \to H$ איזומורפיזם.

א. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ב. הוכיחו כי ב-G קיים איבר מסדר n אם ורק אם ב-H קיים איבר מסדר n. [ניתן להיעזר בשאלה 3.]

הוכחה

סעיף א: <u>כוון א:</u> נניח כי G אבלית. יהיו $a, b \in H$. אזי היות ו-f על קיימים $x, y \in G$ כך ש-$f(x) = a, f(y) = b$. היות ו-G אבלית, $xy = yx$. לכן, $ab = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x) = ba$, כלומר $ab = ba$. לפיכך, H אבלית.

<u>כוון ב:</u> נניח כי H אבלית. יהיו $x, y \in G$. היות ו-H אבלית, $f(x)f(y) = f(y)f(x)$. לכן, $f(xy) = f(x)f(y) = f(y)f(x) = f(yx)$. היות ו-$f$ חח"ע (כי היא איזומורפיזם), נובע ש-$xy = yx$. לכן, G אבלית. **מש"ל.**

סעיף ב: <u>כוון א:</u> נניח שב-G קיים איבר מסדר n, g. אזי לפי שאלה 3 סעיף ב $o(f(g)) = o(g) = n$ ולכן קיים איבר מסדר n ב-H (האיבר הוא $f(g)$!).

<u>כוון ב:</u> נשתמש בטענה הבאה (שהייתם אמורים לראות בהרצאה).

<u>טענה:</u> אם $f: G \to H$ איזומורפיזם, אז גם $f^{-1}: H \to G$ איזומורפיזם (שימו לב ש-f^{-1} קיימת כי f חח"ע ועל).

[אתם לא צריכים להוכיח אותה בתרגיל או במבחן, אבל אנחנו נציג את ההוכחה בכל מקרה.]

<u>הוכחת הטענה:</u> f^{-1} פונקציה הפיכה (ההופכית שלה היא f) ולכן היא חח"ע ועל. נותר להראות כי f^{-1} הומומורפיזם. יהיו $a, b \in H$, אזי
$f^{-1}(ab) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(a))f(f^{-1}(b))\right) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(a)f^{-1}(b))\right) = f^{-1}(a)f^{-1}(b)$, כדרוש. <u>מש"ל טענה.</u>

כעת, $f^{-1}: H \to G$ איזומורפיזם ולכן, לפי כוון א, אם קיים ב-H איבר מסדר n אז גם ב-G קיים איבר מסדר n. **מש"ל.**

הערה: אפשר להשתמש בטענה כדי לקצר את ההוכחה של סעיף א (מספיק להוכיח רק את כוון א). אפשר להוכיח סעיף ב גם ללא הטענה, באופן ישיר.