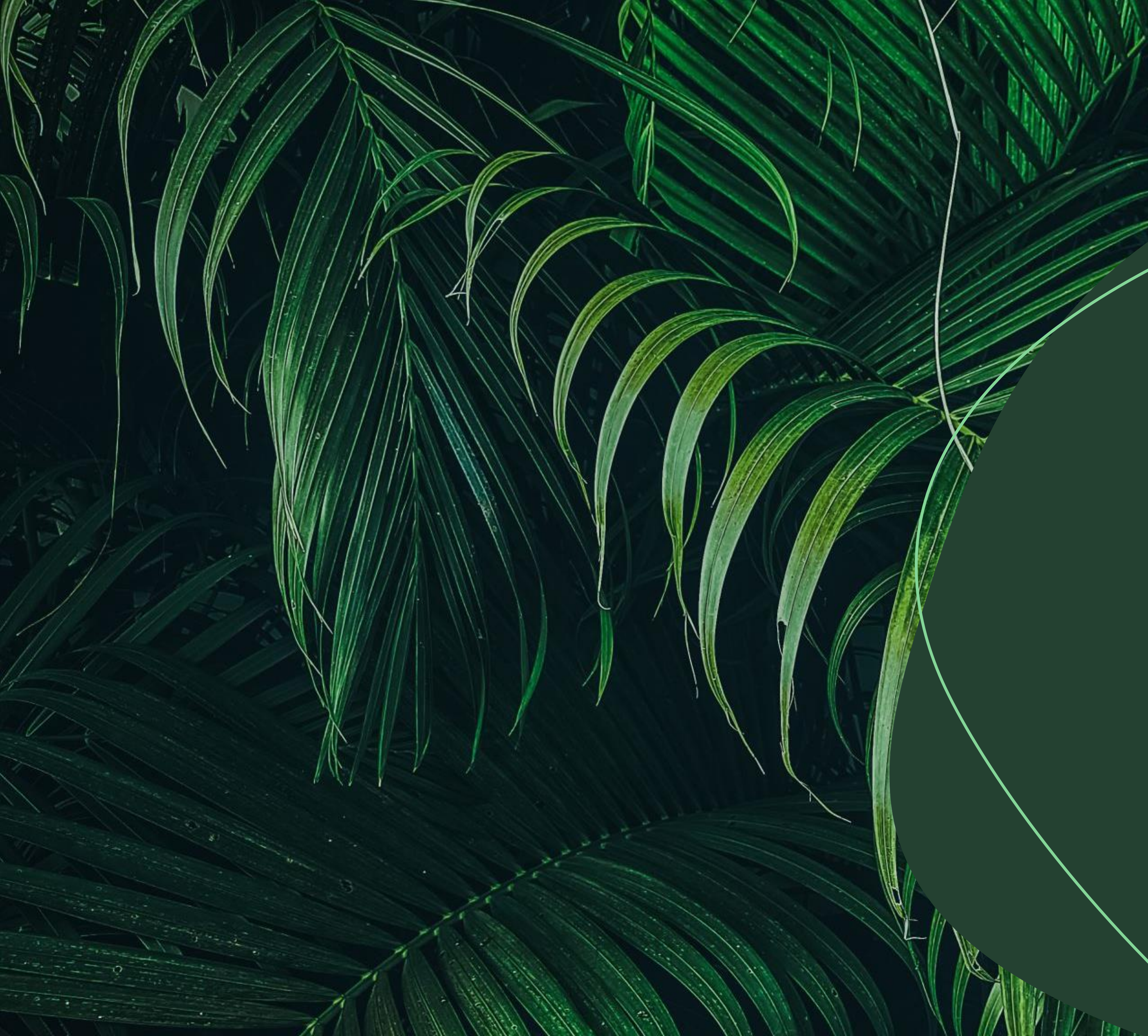

תרגול 11- אושרית

לכסון אורתוגונלי ולכסון אוניטרי ותרגילי חזרה

לכסון אורתוגונלי (מעל $\mathbb{R}$) [עריכה]

אלגוריתם [עריכה]

- מצא את הע"ע של המטריצה A
- מצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים של המטריצה A
- מצא בסיסים למרחבים העצמיים של המטריצה A
- הפעל אלגוריתם גרם-שמידט על מנת להפוך כל אחד מהבסיסים האלו (בנפרד) לאורתונורמלי
- שים את כל הוקטורים מכל הבסיסים בעמודות מטריצה P, היא בהכרח תהיה אורתוגונלית.
- $P^tAP=D$ הינה מטריצה אלכסונית

כמו בלכסון רגיל

חדש

תרגיל. לכסן אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}22 & -2 & 4\\ -2 & 19 & -2\\ 4 & -2 & 22\end{pmatrix}$, מצא את P אורתוגונלית ו-D אלכסונית המקיימת $D=P^{-1}AP$

פתרון. הפולינום האופייני של המטריצה הוא

$$P_A(\lambda) = \left|\lambda I - \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 18)^2 (\lambda - 27)$$

המרחבים העצמים הם

- $\lambda = 18$

$$V_{\lambda=18} = N\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- $\lambda = 27$

$$V_{\lambda=27} = N\left(\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

כלומר אם היינו צריכים ליכסון רגיל אז המטריצה המלכסנת היתה פשוט

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ובנוסף נשים לב שווקטורים ממרחבים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (רק כאשר A סמטרית) כלומר

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

לכן למעשה יש לבצע את גרם שמידט רק עבור המרחב העצמי $V_{\lambda=18}$ו-

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולסיום צריך לנרמל את הווקטורים, וכעת יש לנו מטריצה אורתוגנלית $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4.5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

המקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = P^t AP$$

אותו אלגוריתם עובד עבור לכסון אוניטרי בשינוי קל מאוד:

לכסון אוניטרי מעל C

אלגוריתם [עריכה]

- מצא את הע"ע של המטריצה A
- מצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים של המטריצה A
  - מצא בסיסים למרחבים העצמיים של המטריצה A
  - הפעל אלגוריתם גרם-שמידט על מנת להפוך כל אחד מהבסיסים האלו (בנפרד) לאורתונורמלי
- שים את כל הוקטורים מכל הבסיסים בעמודות מטריצה P, היא בהכרח תהיה אוניטרית
- $P^*AP = D$ הינה מטריצה אלכסונית

דוגמא: מצא מטריצה אוניטרית המלכסנת את: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

פתרון: נמצא את הע"ע של A.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

אנו מקבלים שהע"ע הם: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+i,\ \lambda_3=1-i$.

כיוון שקיבלנו 3 ע"ע שונים והריבוי של כל ע"ע הוא 1, מספיק למצוא עבור כל ע"ע וקטור עצמי.

א. עבור $\lambda_1=1$ נקבל את הו"ע: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ שהוא מנורמל.

ב. עבור $\lambda_2=1+i$ נקבל את הו"ע: $v_2' = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולאחר נירמול

נקבל את הוקטור האורתונורמלי הבא: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

ג. עבור $\lambda_3 = 1 - i$ נקבל את הו"ע: $v_3' = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולאחר נירמול

נקבל את הוקטור האורתונורמלי הבא: $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

(הנורמה של v_3' הוא: $\|v_3\| = \sqrt{i \cdot \bar{i} + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{2}$)

לכן המטריצה האוניטרית היא:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

הערות:

יחס סימטרי

א. אם A דומה אורתוגונלית ל-B אז B דומה אורתוגונלית ל-A.

ב. מטריצות הדומות אורתוגונלית דומות גם בדמיון הרגיל. ההיפך אינו נכון בדר"כ.
למשל - המטריצות $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ דומות זו לזו, אבל אינן דומות אורתוגונלית.
(הסבר בשקף הבא)

הסבר:

הע"ע של A ו-B הם 0 ו-5 ולכן A ו-B דומות למטריצה האלכסונית $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$. כיוון ש-A ו-B דומות לאותה מטריצה, מקבלים שהן דומות.

אבל הן לא דומות אורתוגונלית. כיוון ש-A היא מטריצה סימטרית, ואילו היתה A דומה אורתוגונלית ל-B היינו מקבלים לפי משפט ש-B היא גם מטריצה סימטרית. אולם B איננה סימטרית, ולכן A אינה דומה אורתוגונלית ל-B.

תרגיל:

יהי T אופרטור נורמלי. הוכיחו:

1. $\ker T = \ker T^*$.
2. $ImT = ImT^*$
3. לכל k טבעי, $\ker T^k = \ker T$
4. לכל k טבעי, $ImT^k = ImT$.

פתרון:

1. $T^*(v) = 0 \iff ||T^*(v)|| = 0 \iff ||T(v)|| = 0 \iff T(v) = 0$.

הוכחנו תרגול שעבר

לפי הגדרת גרעין נקבל את השוויון הדרוש.

2. ראינו כי $Im(T) = (\ker T^*)^{\perp}$ ולכן בצירוף סעיף 1. נקבל $Im(T) = (\ker T^*)^{\perp} = (\ker T)^{\perp} = (ImT^*)$

לפי טרנזיטיביות יחס השוויון

נציב T כוכבית במקום T בשוויון

תרגול שעבר

3. מ"ל לכ $k=2$. הסבר: אם T נורמלית, אז גם T^2 נורמלית. ואז נקבל ש $\ker T^4 = \ker T^2 = \ker T$. וכן הלאה באינדוקציה לכל חזקה של 2. כעת, עבור k טבעי כלשהו, קיים n טבעי כך ש $2^n < k < 2^{n+1}$. אז: $\ker T = \ker T^{2^n} \subseteq \ker T^k \subseteq \ker T^{2^{n+1}} = \ker T$, לכן $\ker T^k = \ker T$.

הוכחה מלאה -שיעורי בית

4. נובע מ3, מההכלה: $ImT^k \subseteq ImT$ וממשפט הדרגה.

$$dim(\operatorname{Im} T) + dim(\ker T) = \dim V$$
$$\dim(\operatorname{Im} T^k) + \dim(\ker T^k) \equiv \dim V$$

תרגיל: יהיו $u, v \in V$ שני וקטורים כך $|v| = |u|$. הוכיחו כי קיימת T אוניטרית כך ש $T(u) = v$.

פתרון:

מקרה ראשון: נניח ש $|u| = |v| = 1$.

נשלים את u לבסיס או"נ $\{u, u_2, ..., u_n\}$ ונשלים את v לבסיס או"נ $\{v, v_2, ...v_n\}$.

ממשפט ההגדרה קיימת העתקה לינארית כך ש $T(u) = v, T(u_i) = v_i$. מכיוון שהיא מעבירה בין בסיסים או"נ היא העתקה אוניטרית.

מקרה כללי:

1. אם $|u| = |v| = 0$ נקח $T = I$.

2. אחרת, נקח $u' = \frac{u}{|u|}, v' = \frac{v}{|v|}$.

מהמקרה הראשון יש T אוניטרית כך ש $T(u') = v'$. נכפיל בנורמה כדי לקבל $T(u) = v$.

בהצלחה!!!