מרחב מכפלה פנימית

12 ביוני 2017

מרחב מכפלה פנימית

הגדרה: יהיה Vמרחב וקטורי מעל $K=\mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$ אזי מכפלה פנימית הינה פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים $v,u\in V$ סקלאר מ K (כלומר $<,>: V\times V\to K$) ומקיימת את האקסיומות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון לכל $\alpha\in K,\ v,u,w\in V$
   (א) $\langle\alpha v,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle$
   (ב) $\langle v+u,w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle u,w\rangle$
   בקיצור $<\alpha v+u,w>=\alpha<v,w>+<u,w>$
2. הרמנטיות לכל $v,u\in V$ מתקיים $<v,u>=\overline{<u,v>}$.
   (אם $K=\mathbb{R}$ זה אומר סימטריות $<v,u>=<u,v>$)
3. אי־שליליות לכל $v\in V$ מתקיים
   (א) $<v,v>\geq 0$ (מתכונה 2 נובע כי $<v,v>=\overline{<v,v>}$ ולכן $<v,v>\in\mathbb{R}$).
   (ב) $v=0\Leftrightarrow<v,v>=0$

טרמינולוגיה: V יקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ)
תכונות:

1. כמעט לינאריות ברכיב השני: $<v,\alpha u+w>=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$
2. הכללה: $\left\langle\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i,\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j w_j\right\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_i\bar{\beta}_j<v_i,w_j>$
3. לכל $v\in V$ מתקיים $<0,v>=<v,0>=0$
   הוכחה: $<0,v>=<0+0,v>=<0,v>+<0,v>\Leftarrow<0,v>=0$

דוגמאות למכפלות פנימיות:

1. $V=\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הסקלארית מוגדרת להיות

$<x,y>=<(x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n)>:=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$. למשל $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$

הערה: עבור $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ הפונקציה $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$ אינה מכפלה פנימית.

הוכחה: $\langle ie_1, ie_1\rangle = -1$ בסתירה לאי שליליות של מ"פ.

2. $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר מכפלה פנימית להיות

$<z,w>=<(z_1,\dots z_n),(w_1,\dots w_n)>:=\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i = z^t \bar{w}$.

למשל:

(א) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot i + i\cdot(-4) + 2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-3i$

(ב) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 1 + i\cdot(i) + 2\cdot 0 = 0$

(ג) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 1 + i\cdot(-i) + 2\cdot 2 = 6$

(ד) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} -i \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4\sqrt{2}-6i+6$

3. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$. לכל $A,B\in V$ נגדיר $\langle A,B\rangle = trace(AB^t)$.

טענה: זאת מכפלה פנימית.

הוכחה:

(א)

$$\begin{aligned}
&<\alpha A+B, C>= trace((\alpha A+B)C^t) = trace(\alpha AC^t + BC^t)\\
&= trace(\alpha AC^t) + trace(BC^t) = \alpha trace(AC^t) + trace(BC^t)\\
&= \alpha <A,C> + <B,C>
\end{aligned}$$

(ב) $<A,B>= trace(AB^t) = trace((AB^t)^t) = trace(BA^t) =<B,A>$

(ג) מחישוב ישיר נקבל כי: $<A,A>= trace(AA^t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(A_{ks})^2 \geq 0$

ושיוון אמ"מ $A=0$.

4. $V=\{f:[-1,1]\to\mathbb{C}\,|\,\text{f is continuous function}\}$ מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[-1,1]$ ל $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$.

נגדיר $\langle f,g\rangle := \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
טענה: זאת מכפלה פנימית.
הוכחה:

(א)

$$< \alpha f+g,h >= \int\limits_{-1}^{1} (\alpha f(x)+g(x))\overline{h(x)}\,dx =$$
$$\alpha \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \alpha < f,h > + < g,h >$$

(ב) $< f,g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \overline{\overline{g(x)}f(x)}\,dx = \overline{\int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{< g,f >}$

(ג) $< f,f >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx \geq 0$
וקיים שיוויון אמ"מ $f=0$ (כי f רציפה).

תרגיל: חשב $\langle \sin(x),\cos(x)\rangle$
פתרון: $\langle \sin(x),\cos(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = 0$.

הגדרה: יהא V ממ"פ. וקטורים $v,v' \in V$ יקראו או"ג אם $\langle v,v'\rangle = 0$. קבוצה $S \subseteq V$ תקרא או"ג אם לכל $v \neq v' \in S$ או"ג. B יקרא בסיס או"ג אם הוא בסיס + או"ג. למשל:
$S = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \}$ בסיס א"ג ל $\mathbb{R}^3$ (ביחס למכפלה הסקלארית).
תרגיל: תהא V ממ"פ, יהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או"ג ויהא $v \in V$ אזי

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle} v_i$$

הוכחה: כיוון ש B בסיס, קיימים סקלארים כך ש $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ נראה כי לכל i מתקיים $\alpha_i = \frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}$. אכן יהא i קבוע

$$\langle v,v_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j,v_i\rangle = \alpha_i \langle v_i,v_i\rangle$$

נחלק ב $\langle v_i,v_i\rangle$ ונקבל את המבוקש.

למשל $S=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס א"ג ל $\mathbb{R}^3$ (ביחס למכפלה הסקלארית).
אזי

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\frac{-2x+z}{5}\right)\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{x+2z}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\left(\frac{y\pi}{\pi^2}\right)\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}$$