תרגיל בית 9

1. נניח ו (X,S,μ) הינו ממ"ח ונניח כי $K:X\times X\to\mathbb{R}$ הינה מדידה $S\times S$. נניח כי קיים $M<\infty$ כך ש

$$\int\left|K(x,y)\right|\mu(dx)<M$$

לכל x . וגם כי

$$\int\left|K(x,y)\right|\mu(dy)<M$$

לכל y . אם f מדידה נגדיר

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)\mu(dy)$$

כאשר האינטגרל קיים.

i. הוכיחו כי $\|Tf\|_1\le M\|f\|_1$.

פתרון: עפ"י הגדרה

$$\|Tf\|_1=\int\left|\int K(x,y)\,f(y)\mu(dy)\right|\mu(dx)\le\int\int\left|K(x,y)\,f(y)\right|\mu(dy)\mu(dx)$$
$$\int\left(\int\left|K(x,y)\right|\mu(dx)\right)\left|f(y)\right|\mu(dy)\le\int M\left|f(y)\right|\mu(dy)=M\|f\|_1$$

ii. אם $1<p<\infty$, הראו כי $\|Tf\|_p\le M\|f\|_p$.

פתרון: עפ"י הגדרה

$$\|Tf\|_p=\left(\int\left|\int K(x,y)\,f(y)\mu(dy)\right|^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int\left(\int\left|K(x,y)\,f(y)\right|\mu(dy)\right)^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

נסתכל על

$$\int\left|K(x,y)\,f(y)\right|\mu(dy)=\int\left|K(x,y)^{\frac{p-1}{p}}K(x,y)^{\frac{1}{p}}\,f(y)\right|\mu(dy)$$

$$\le\left(\int\left|\left(K(x,y)^{\frac{p-1}{p}}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\mu(dy)\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\left|\left(K(x,y)^{\frac{1}{p}}f(y)\right)\right|^{p}\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int\left|K(x,y)\right|\mu(dy)\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int K(x,y)\left(f(y)\right)^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}\le M^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\left|K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p\mu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

נציב ביטוי הקודם ונקבל עפ"י הסעיף הראשון

$$\|Tf\|_p = \left(\int \left(M^{\frac{p-1}{p}} \left(\int \left| K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p \mu(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(M^{\frac{(p-1)p}{p}} \int \left(\int \left| K(x,y)\left(f(y)\right)\right|^p \mu(dy) \right) \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \left(M^{\frac{(p-1)p}{p}} \left\| Tf^p \right\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(M^{\frac{(p-1)p}{p}} M \|f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= M^{\frac{p-1}{p}} M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p = M \|f\|_p$$

2. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \ge 1$.

פתרון: תהי $f \in L^p$ $\left(\int |f|^p d\mu < \infty \right)$ חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות φ_n כך ש$\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ ו $\varphi_n \to f$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n{}^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \phi_n{}^p d\mu = \int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון $|a+b|^p \le 2^p \left(|a|^p + |b|^p \right)$. נגדיר את $g_n = 2^p \left(|\varphi_n|^p + |f|^p \right)$.
ברור כי לכל n g_n אינגרבילית וכן כי $g = \lim g_n = 2^{p+1} |f|^p$ אינטגרבילית. מכאן , עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$\lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|^p d\mu = \int \lim_{n\to\infty} |f - \phi_n|^p d\mu = 0$ ומכאן שההתכנסות היא ב L^p . עבור פונקציה כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל

$$\left\| f^+ - f^- - \left(\varphi_n^+ - \varphi_n^- \right) \right\|_p \le \left\| f^+ - \varphi_n^+ \right\|_p + \left\| \varphi_n^- - f^- \right\|_p \to 0 \ .$$

3. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב L^∞ שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח ו $f_n \in L^\infty$, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. נגדיר את $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ולכל f_n נגדיר את הקבוצה $E_n = \left\{ x : |f(x)| > \|f\|_\infty \right\}$. ברור כי $m(E_n) = 0$ וגם כי $m(E) = m\left(\bigcup_n E_n \right) = 0$.

מן ההגדרה של $\|\cdot\|_{\infty}$ נובע כי $f(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ(על E) ולכן גם מתכנס כב"מ. נראה כי $f \in L^{\infty}$,

$$\sup_{x\in E^c}\left|f(x)\right| \le \sup_{x\in E^c}\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in E^c}\left|f_n(x)\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n(x)\right\|_{\infty} < \infty$$

ומכאן ש $f \in L^{\infty}$.