(1) 10.11.13

אליצה פוס

הרצאה 5

עולם X

תת הקבוצות של X: $\Sigma \subset M(X)$

מידה: $\mu: \Sigma \to R_+$

<u>חוג</u> - סגור תחת חיתוכים סופיים והפרש סימטרי (נובע גם איחוד)

<u>אלגברה</u> - חוג שמקיים גם את הדרישה $X \in \Sigma$.

$\Leftarrow$ אם $A \in \Sigma$ אז $A^c = X \Delta A \in \Sigma$

<u>חוג למחצה</u> - סגור תחת חיתוכים, ואם $A, A_1 \in \Sigma$, $A \supseteq A_1$

אז $A \Delta A_1 = \dot{\bigcup}_{k=2}^{n} A_k$ $\quad A_k \in \Sigma$

[$\{(a,b)\}$ חוג למחצה]

(*) <u>משפט:</u> אם Σ חוג למחצה אז החוג שנוצר מ-Σ: $R(\Sigma)$, הוא כל האיחודים הסופיים הזרים של איברים מ-Σ.

$$R(\Sigma) = \{ A : A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k \quad \underset{\text{ו-n סופי}}{A_k} \in \Sigma \}$$

<u>הגדרה:</u> פונקציה $\mu : \Sigma \to R_+$ נקראת מידה אדטיבית סופית אם:

1. $\Sigma \subset M(X)$ הוא חוג למחצה
2. $\mu(A) \ge 0$ לכל $A \in \Sigma$ (חיוביות)
3. אם $A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k$, $A, A_k \subset \Sigma$, אז $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (אדטיביות סופית)

<u>הגדרה:</u> מידה μ' היא הרחבה של מידה μ אם $\Sigma \subset \Sigma'$ ולכל $A \in \Sigma$,

$\mu(A) = \mu'(A)$.

<u>משפט:</u> אם Σ חוג למחצה ו-μ מידה אדטיבית סופית על Σ, אז קיימת הרחבה יחידה של μ למידה על $R(\Sigma)$.

(נניח קבוצה בחוג ונגדיר לה מידה)

<u>הוכחה:</u> תהי $A \in R(\Sigma)$, לפי המשפט (*) ניתן להציג את A כאיחוד סופי זר של קבוצות מ-Σ: $A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma$

נגדיר $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ [A היא קבוצה בחוג, ומהמשפט אנו יודעים שניתן להציג את A כאיחוד, ומה תכונות של מידה, המידה של A חייבת להיות סכום המידות]

צריך להראות ש-$\mu(A)$ לא תלוי בבחירת הפירוק הזר, כלומר שאם $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} B_i$

אז $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$.

נגדיר $C_{ik} = B_i \cap A_k$: (1) $C_{ik} \in \Sigma$ כי Σ סגור לחיתוכים

(2) $C_{ik} \cap C_{j\ell} = \emptyset$ אם $i \ne j$ או $k \ne \ell$ (זרות בזוגות)

לכן $A = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le n}} C_{ik}$, $B_i = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} C_{ik}$, $A_k = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} C_{ik}$

$$\left[B_i \subset \underbrace{\dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k}_{A} \Rightarrow B_i \subset B_i \cap \left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right) = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} \overbrace{(A_k \cap B_i)}^{C_{ik}} \right]$$

② 10.11.13

אדיטיבי סופי
הרבה S

מהגדרת אדיטיביות סופית (תכונה 3) - $M(B_i)=\sum_{k=1}^{n} M(C_{ik})$

(השתמשנו בסוף הסעיף הקודם שניתן לכתוב את B_i כאיחוד של C_{ik})

$$\sum_{k=1}^{n} M(A_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} M(C_{ik}) = \sum_{i=1}^{r}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m(C_{ik})}_{M(B_i)} = \sum_{i=1}^{r} M(B_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{A_k=\dot{\bigcup_{i=1}^{r}} C_{ik}\right\}$$

ולכן ההגדרה של $M(A)$ היא טובה.

[תרגיל - M אדיטיבית סופית על $R(\Sigma)$ ⇐ קיום של ההרחבה.]
(צריך לקחת קבוצות זרות בתוך $R(\Sigma)$ ולהראות שהאיחוד הזר הוא סכום המידות)

הוכחת יחידות: נובע מההוכחה שכתבנו! נניח M_1, M_2 הרחבות של M.

אם $A\in R(\Sigma)$ אז $A=\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} A_k$, $A_k\in\Sigma$, ומאדיטיביות סופית:

$$M_1(A)=\sum M_1(A_k)=\sum M(A_k)=\sum M_2(A_k)=M_2(A)$$

מאדיטיביות סופית; הרחבה $M_1(A_k)=M(A_k)$; הרחבה $M_2(A_k)=M(A_k)$

כלומר $M_1(A)=M_2(A)$ ולכן יש הרחבה יחידה.

<u>הערה:</u> אם M מידה אדיטיבית סופית אז $M(\emptyset)=0$, כי ניתן לכתוב אותה בתור איחוד זר עם עצמה:

הוכחה: $\emptyset=\emptyset\dot\cup\emptyset \Rightarrow M(\emptyset)=M(\emptyset)+M(\emptyset) \Rightarrow M(\emptyset)=0$

<u>משפט:</u> תהי M מידה אדיטיבית סופית שמוגדרת על חוג R, ויהיו $A, A_1, \dots, A_n\in R$, אז:

1. אם $\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} A_k\subset A$ ו-A_k זרות בזוגות אז $\sum_{k=1}^{n}M(A_k)\le M(A)$

2. אם $A\subset\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ אז $M(A)\le\sum_{k=1}^{n} M(A_k)$

<u>הוכחה:</u> 1. $B=A\setminus\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_k\right)$ ⇐ $A=B\dot\cup\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} A_k$

$$M(A)=\underbrace{M(B)}_{\ge 0}+\sum_{k=1}^{n} M(A_k)$$

ולכן: $M(A)\ge\sum_{k=1}^{n} M(A_k)$

נשים לב שהקבוצות A_k הן לא זרות. אנו רוצים לעבור לקבוצות זרות. הדרך הסטנדרטית לעשות זאת היא לקחת את ההפרש של מה שהיה עד עכשיו

2. • נגדיר $B_1=A_1$, וכן: $B_{l+1}=A_{l+1}\setminus\bigcup_{k=1}^{l} A_k$

• $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ זרות בזוגות

• $\dot{\bigcup_{k=1}^{l}} B_k=\bigcup_{k=1}^{l} A_k$ ניתן להוכיח באינדוקציה פשוטה

ולכן: $M(B_l)\le M(A_l)$ לפי 1.
$A\subset\dot\bigcup B_l$

ועכשיו ניתן לרשום:

$$C=\dot{\bigcup_{l=1}^{n}} B_l\setminus A \Rightarrow \dot{\bigcup_{l=1}^{n}} B_l=A\dot\cup C \Rightarrow M(A)+M(C)=\sum_{l=1}^{n} M(B_l)$$

ולכן: $M(A)\le\sum_{l=1}^{n} M(B_l)\le\sum_{l=1}^{n} M(A_l)$

(בעקרון היה מספיק להגיד שאם A מוכל באיחוד הזר אז המידה קטנה מהמידה של האיחוד הזר, לפי שלב 1 בהוכחה...)

(3) 10.11.13

שלמה סוף
התחלה 3

עד עכשיו הגדרנו אדטיביות סופית. עכשיו נגדיר מהי אדטיביות בת מניה.

__הגדרה:__ מידה m נקראת אדטיבית בת מניה אם לכל $A_1,A_2,\dots,A_n\in\Sigma$

אם $A_i\cap A_j=\emptyset$ $\forall i\neq j$, ו- $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ אז $m(A)=\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k)$

[ניתן לקחת את הקטע $[0,1]$ ולרשום אותו כאיחוד זר: $\bigcup_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2^{i-1}},\frac{1}{2^{i}}\right]$ (?)

$\Rightarrow [0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},\frac{7}{8}]\dots$]

__דוגמאות:__

- מידה הסתברות על מרחב בן מניה $X=\mathbb{N}$, $P(X=k)=P_k$

  $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$ ואז נגדיר $P(A)=\sum_{k\in A}P_k$ ⇐ מידה אדטיבית בת מניה - σ אדטיבית

  למשל - התפלגות גיאומטרית.

- מידה על $Q\cap[0,1]$. נגדיר: $m([a,b]\cap Q)=b-a$ $\quad 0\le a\le b\le 1$

  Q רציונלים.

  לכאורה: 1. $[a,b]\cap Q$ חוג למחצה

  2. m מידה אדטיבית סופית

  3. המידה של נקודה היא אפס $m(\{a\})=0$ לכל a

  ⇐ m לא אדטיבית בת מניה.

__הערה כללית:__ אם X בן מניה ו- $\Sigma\subset\mathcal{P}(X)$, m היא σ אדטיבית מוגדרת על Σ.

ו- $m(\{x\})=0$ לכל x, אז $m(A)=0$ $\forall x\in X$ כי $A=\bigcup_{x\in A}\{x\}$

דוגמה: $X=\mathbb{N}$, $A=\left\{\begin{matrix}\text{תת קבוצות סופיות}\\ \text{וקו סופיות של } \mathbb{N}\end{matrix}\right\}$. נגדיר: $m(A)=\begin{cases}0 & \text{סופית } A\\ 1 & \text{קו סופית } A\end{cases}$

m מידה אדטיבית סופית אבל לא σ אדטיבית

__משפט:__ אם m מידה σ אדטיבית על חוג למחצה Σ אז ההרחבה שלה ל- $R(\Sigma)$ גם כן σ אדטיבית

__משפט:__ תהי m מידה σ אדטיבית על חוג R, ונניח שיש לנו $A_1,A_2,\dots\in R$

1. אם $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset A$ ו- $A_i\cap A_j=\emptyset$ אז $m(A)\ge\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i)$

2. אם $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ אז $m(A)\le\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i)$

[ממשפט קודם $m(A)\ge\sum_{i=1}^{n}m(A_i)$, ועבור $n\to\infty$ אי השוויון נשמר.

נגדיר $B_1=A_1$, $B_k=A_k\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\right)$ וכו] לא נוכיח משם

(4) 10.11.13

שאלה פתוחה
הרצאה 2

הגדרה: אלגברה $\Sigma \subseteq M(A)$ נקראת σ-אלגברה אם היא סגורה תחת איחודים בני מניה. כלומר אם לכל $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$, גם $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

טענה: σ אלגברה סגורה תחת חיתוכים בני מניה

הוכחה: יהיו $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \Sigma$$

כי Σ סגורה תחת משלים ותחת איחודים בני מניה

טענה: חיתוך כלשהו של σ אלגברות הוא σ אלגברה (אותה הוכחה כמו חיתוך של אלגברה)

טענה: בהינתן קבוצה Σ, קיימת ויחידה σ אלגברה מינימלית שמכילה אותה, והיא נקראת ה σ אלגברה שנוצרת מΣ. $B(\Sigma)$.

שימו לב- לכל X, $M(X)$ היא σ אלגברה.

דוגמאות:
1. $M(X)$ - σ אלגברה
2. א. $\{X, \emptyset\}$ - σ אלגברה
ב. $\{X, \{0\}, X \setminus \{0\}, \emptyset\}$ - σ אלגברה
3. $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \{A \in \mathbb{N} : A \text{ סופי או קו סופי}\}$ - לא σ אלגברה

דוגמה מרכזית: הσ אלגברה שנוצרת מכל הקטעים (לא משנה אם לוקחים קטעים פתוחים / סגורים וכו'..) נקראת σ אלגברת בורל ($\mathcal{B}$).

קל לראות ש $\mathcal{B}$ מכילה את כל הסינגלטונים (= קבוצות שמכילות נקודה בודדת), את כל הקבוצות הפתוחות, את כל הקבוצות הסגורות.

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$$

- אין אפיון פשוט ומפורש (*) (מתחילת ההרצאה), כלומר בפרט הדבר הבא לא נכון: כל קבוצה ב $\mathcal{B}(\Sigma)$ ניתנת להצגה כאיחוד בן מניה של קבוצות מΣ, אפילו אם Σ הוא אלגברה

⑤ 10.11.13

שולמה פוז

הרצאה 2

<u>קבוצת בורל</u> - קבוצה שהיא ב σ אלגברת בורל.

- ובפרט, עבור קבוצות בורל - לא נכון שניתן להציג אותן בתור איחוד בן מנה של קטעים.

יש 3 פעולות: איחוד בן מניה, חיתוך בן מניה ומשלים.
המטרה היא לבנות את קבוצות בורל מתוך הקטעים.
כמה פעמים צריך? באמצעות 3 הפעולות שיש לנו.
צריך מס' לא בן מניה של שלבים כדי לייצר את כל קבוצות בורל

<u>הגדרה:</u> אוסף קבוצות A_α הוא כיסוי של B אם $B \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$

הכיסוי הוא סופי אם $|I| < \infty$, ובן מניה אם I קבוצה בת מניה.

כיסוי סופי ניתן לרשום כך: $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

כיסוי בן מניה ניתן לרשום כך: $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

- אם כל ה A_α שייכות לאוסף Σ אז אנחנו אומרים שזה כיסוי ע"י איברי Σ, ואז לפעמים נגיד שזהו Σ <u>כיסוי</u>.
- בפרט, אם כל ה A_α קטעים פתוחים נגיד שזהו <u>כיסוי ע"י קטעים פתוחים</u>.
- אם כל ה A_α פתוחות נגיד שזה <u>כיסוי פתוח</u>.

<u>תת כיסוי:</u> אם $B \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ וגם $\underbrace{B \subset \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha}_{\text{תת כיסוי}}$ $J \subset I$

<u>טענה/דוגמא:</u> ניתן לכסות את כל הרציונלים ע"י קטעים פתוחים שסכום אורכיהם קטן כרצוננו.

<u>הוכחה:</u> יהי $\varepsilon>0$, תהי $q_1, q_2 \dots$ מניה של הרציונלים.

כעת נגדיר $I_n = \{q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\}$, $q_n \in I_n$, $|I_n| = \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\Leftarrow \quad Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \ , \ \sum |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

<u>דוגמא:</u> $\{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, 2)\}$ הוא כיסוי פתוח של $[0,1]$

<u>משפט:</u> לכל כיסוי פתוח של $\underbrace{[0,1]}_{\text{כל קבוצה קומפקטית}}$ יש תת כיסוי סופי

(לכל כיסוי פתוח של כל קבוצה קומפקטית יש תת כיסוי סופי)