פיסיקה למתמטיקאים

מטוטלת פשוטה

1. משוואת התנועה עבור מטוטלת פשוטה באורך ℓ היא

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \tag{1}$$

כאשר $-mg\sin\theta$ רכיב המשקל בכוון המשיקי. נסמן $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ונקבל

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0. \tag{2}$$

בקרוב תנודות קטנות $\sin\theta \approx \theta$ ועם תנאי ההתחלה

$$\theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta(0)} = 0 \tag{3}$$

הפתרון ל (2) הינו

$$\theta = \theta_0 \cos\omega t. \tag{4}$$

זמן המחזור של התנודות נתון ע"י

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}. \tag{5}$$

נקבל כעת בטוי לזמן המחזור ללא קירוב תנודות קטנות. לשם כך נכפול את (2) ב $\dot{\theta}$ ונקבל

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega^2\dot{\theta}\sin\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta\right) = 0, \tag{6}$$

ולכן

$$E = \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta\right) = const. \tag{7}$$

בפרט, אם נציב את תנאי ההתחלה (3) נקבל

$$E = -\omega^2\cos\theta_0, \tag{8}$$

ועל כן מהצבה ב (7) נקבל

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}, \tag{9}$$

כאשר $\pm$ מציין את כוון התנועה. זמן המחזור T יהיה אפוא 4 פעמים הזמן הדרוש להשלים תנועה זוויתית $0 \leq \theta \leq \theta_0$ כלומר

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}. \tag{10}$$

האינטגרל באגף ימין של (10) נקרא אינטגרל אליפטי מסוג ראשון של לג'נדר ואינו פתיר אנליטית.

נשיב לב כי בקרוב תנודות קטנות $\theta \approx \theta_0, \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \cos\theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2$ נקבל

$$T \approx \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{11}$$