תורת הקבוצות תרגיל בית 8 פתרון

1. לא נכון. ω ו-2 מונים. אבל 2^ω אינו מונה. למשל, שום סודר גבול מונה

אינסופי הוא כזה!

2. הראינו בהרצאה ש- $\alpha \le f(\alpha)$ הוא מונה. סודר גדול הוא סודר β

המקיים $\beta = f(\beta)$. $f(\beta)$ מונה $\Rightarrow$ β מונה.

3. ראינו ש $2^\omega = \omega$ (סודרים).

אולם ברור ש- $\omega < |2^\omega| = 2^\omega$ כמונים

4. נסמן f ע"י $f(\alpha) = \aleph_\alpha$.

הראינו בהרצאה שפונ' מונוטונית ורציפה (לכל β גבול

אז $f(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$).

הוכחנו בעבר שהיות ו f היא פ' רציפה אז לכל קבוצה

B: $f(\sup_{\beta\in B}\beta) = \sup_{\beta\in B} f(\beta)$.

ולכן, $\aleph_\alpha = \aleph_{\sup\{\alpha_n : n<\omega\}} = \sup\{\aleph_{\alpha_n} : n<\omega\} =$

$\sup\{\alpha_{n+1} : n<\omega\} = \alpha$

כעת נוכיח ש α הוא הראשון.

יהי $\beta<\alpha$. יש n כך ש- $\beta<\alpha_n$. יהי n הראשון כך ש- $\beta<\alpha_n$.

אם $n=0$, אז $\beta < \aleph_0 = \omega$ ולכן $\beta < \omega = \aleph_0 \le \aleph_\beta$.

לכן, $\beta < \aleph_\beta$.

אחרת, $n \neq 0$. n הראשון כך ש- $\beta<\alpha_n$, ולכן $\alpha_{n-1} \le \beta$

$$\beta < \alpha_n = \aleph_{\alpha_{n-1}} \le \aleph_\beta$$

ובכלל, $\beta < \aleph_\beta$.

מש"ל.

5. א. תהי $f: cf(\beta) \to \beta$ קופינלית.

נגדיר $g: cf(\beta) \to \alpha+\beta$ ע"י:

$$g(\gamma) = \cancel{\alpha+f(\gamma)}\ \alpha+f(\gamma), \quad \gamma<cf(\beta)$$

נראה ש g קופינלית: יהי $\delta<\alpha+\beta$. אם $\delta<\alpha$, אז

לכן $\delta<\alpha+0$, יש $\gamma < cf(\beta)$ כך ש- $f(\gamma)\ge 0$

אזי $g(\gamma) = \alpha + f(\gamma) \geq \alpha + 0 \geq \delta$

כעת, נניח $\alpha \leq \delta < \alpha + \beta$.

אז כיוון ש... קיים ϵ כך ש-

$\epsilon < \beta$, $\delta = \alpha + \epsilon$

יהי $\gamma \in cf(\beta)$ כך ש- $f(\gamma) \geq \epsilon$.

אזי $g(\gamma) = \alpha + f(\gamma) \geq \alpha + \epsilon = \delta$.

לכן, $cf(\alpha+\beta) \leq cf(\beta)$

כיוון שני: תהי $f : cf(\alpha+\beta) \to \alpha+\beta$ קופינלית.

נגדיר $g : \alpha+\beta \to \beta$

ע"י $g(\gamma) = 0$, $\gamma < \alpha$

$g(\alpha+\gamma) = \gamma$, $\gamma < \beta$

נראה ש- $g \circ f$ קופינלית.

יהי $\gamma < \beta$. $\alpha+\gamma < \alpha+\beta$. לכן קיים $\delta \in cf(\alpha+\beta)$ כך ש-

$f(\delta) \geq \alpha+\gamma$

$f(\delta) = \alpha + \delta'$ כך ש- $\delta' \geq \gamma$

אז $g \circ f(\delta) = g(\alpha+\delta') = \delta' \geq \gamma$.

מסקנה: $cf(\beta) \leq cf(\alpha+\beta)$

לכן $cf(\beta) = cf(\alpha+\beta)$.

ב. תהי $f : cf(\alpha \cdot \beta) \to \alpha \cdot \beta$

נגדיר $g : (\alpha \cdot \beta) \to \beta$ הטלה לרכיב הימני.

טענה: $g \circ f$ קופינלית

הוכחה: יהי $\gamma \in \beta$. אז $(0, \gamma) \in \alpha \cdot \beta$. ע"כ $\delta \in cf(\alpha \cdot \beta)$

כך ש- $f(\delta) \geq (0, \gamma)$.

$f(\delta) = (x, y) \geq (0, \gamma)$

אז בפרט $y \geq \gamma$. לכן $g \circ f(\delta) \geq \gamma$.

ולכן: $cf(\beta) \leq cf(\alpha \cdot \beta)$

לכיוון השני, תהי $f : cf(\beta) \to \beta$ קופינלית.

[illegible]

נגדיר $g : cf(\beta) \to \alpha \cdot \beta$

ע״י $g(\gamma) = (0, f(\gamma))$

יהי $(x,y) \in \alpha \cdot \beta$,

מכיוון ש β גבולי, $y+1 \in \beta$.

אז $(x,y) < (0, y+1)$

יש $\gamma \in cf(\beta)$ כך ש- $f(\gamma) \geq y+1$.

לכן $g(\gamma) = (0, f(\gamma)) \geq (0, y+1) > (x,y)$

וקיבלנו $cf(\alpha \cdot \beta) \leq cf(\beta)$

לכן $cf(\alpha \cdot \beta) = cf(\beta)$

2. נניח β עוקב אז יש γ כך ש- $\beta = \gamma + 1$.

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha$$

וכמו שראינו בסעיף א', $cf(\alpha \beta) = cf(\alpha\gamma + \alpha) = cf(\alpha)$. מש״ל.