

תרגיל בית 1 - אלגברה לינארית למורים

23 בנובמבר 2016

שאלה 1

תכתוב את כל אחד ממספרים הבאים בצורה $a + bi$:

(א) $(1 + 2i)(3 - i)$

פתרון: $5(1 + i)$

(ב) $\frac{1+2i}{3-i}$

פתרון: $\frac{1}{10} + \frac{7i}{10}$

(ג) $(1 + i)^4$

פתרון: $(1 + i)^4 = (1 + i)^2 (1 + i)^2 = 2i \cdot 2i = -4$

(ד) $\frac{1}{2+2i}$

פתרון: $\frac{1}{2+2i}$

(ה) $\frac{1}{i^3}$

פתרון: i

(ו) i^{100}

פתרון: $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$

שאלה 2

מצא את כל שורשים של המשוואות הבאות:

(א) $z^2 + z + 1 = 0$

פתרון: נשתמש בנוסחה למציאת שורשים של משוואה ריבועית: $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} =$

$= \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

(ב) $z^2 + 2z + 2 = 0$

פתרון: $z_{1,2} = -1 \pm i$

$$9z^2 + 25 = 0 \quad (\text{ג})$$

פתרון: משתמשים בנוסחת הכפל המקוצר $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ומקבלים:
 $x^2 - (-\frac{25}{9}) = x^2 - (-\left(\frac{5}{3}\right)^2) = (x - \frac{5}{3}i)(x + \frac{5}{3}i) = 0$. ולכן השורשים הם $x = \pm \frac{5}{3}i$.

שאלה 3

פתור את המשוואות הבאות:

$$4 + 5i = z - (1 - i) \quad (\text{א})$$

פתרון: נסמן $z = x + iy$ ונקבל $z = x + iy = (1 - i) + 4 + 5i = 5 + 4i$ ולכן אחרי עברת אנגפים והשוואה בין החלקים המדומים וחלקים הממשיים נקבל $x = 5$ ו- $y = 4$ ולכן הפתרון של משוואה הוא $5 + 4i$.

$$(1 + 2i)z = 2 + 5i \quad (\text{ב})$$

פתרון: פותרים באות דרך כמו בסעיף א', התשובה סופית היא $\frac{12}{5} + \frac{1}{5}i$.

תרגיל 4

מצאו כל $z \in \mathbb{C}$ שך ש:

$$\bar{z} = i(z - 1) \quad (\text{א})$$

פתרון: נזכר שאם $z = a + bi$ אזי $\bar{z} = a - bi$, ולכן כמו בסעיף הקודם, נציב $z = a + bi$ במשוואה וע"י שוואה של חלקים המדומים והממשיים נקבל $a = -b$ ו- $-b = a - 1$, אין פתרון למערכת משוואות זאת ולכן אין z שיקיים אותה.

$$z^2 \bar{z} = z \quad (\text{ב})$$

פתרון: נעביר את z אגף ונוציא אותו מחוץ לסוגריים ונקבל: $z(z\bar{z} - 1) = 0$ ולכן פתרון של המשוואת הזו היא $z = 0$ או כל ה- z ים אשר מקיימים $z\bar{z} = 1$. נזכר ש- $|z|^2 = z\bar{z}$ ולפי נוסחה שראינו בהרצאה $|z|^2 = a^2 + b^2$ כאשר $z = a + bi$. סה"כ קיבלנו שפתרונות למשוואה הם מספרים מרוכבים אשר המלך הממשי והחלק המדומה שלהם נמצאים על מעגל היחידה.

$$|z + 3i| = 3|z| \quad (\text{ג})$$

פתרון: $|z + 3i| = |a + i(b + 3)|^2 = a^2 + (b + 3)^2$, $(3|z|)^2 = 9(a^2 + b^2)$. נשוואה בין שני הביטויים ונקבל: $a^2 + (b + 3)^2 = 9(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 8(a^2 + b^2) = 6b + 9$.

אחרי העברת אגפים מקבלים: $a^2 + b^2 - \frac{3}{4}b = \frac{9}{8}$, נעשה השלמה לריבוע ונקבל
 $a^2 + (b - \frac{3}{8})^2 = (\frac{9}{8})^2$ ולכן כל אותן נקודות אשר מקיימות את המשוואה הם נקודות
שהחלקים הממשי והדמיוני נמצאים על מעגל היחידה.