מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 3

1. הגדרה. (ידועה במקרים פרטיים מקורסים קודמים, למשל, לגבי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$):
יהיו X,Y מרחבים מטריים. פונקציה f נקראת *רציפה במידה שווה* אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in X$:
$$d_X(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d_Y\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\varepsilon$$

יהיו X,Y מרחבים מטריים. הוכיחו:
א') פונקציה $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.
ב') אם X קומפקטי אז פונקציה $f:X\to Y$ רציפה היא רציפה במידה שווה.

2. תהי x_n סדרה ב-$\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $x_n\to x$.
הוכיחו שתת מרחב $\{x\}\cup\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ (עם מטריקה מושרה מ-$\mathbb{R}^n$) הוא מרחב מטרי קומפקטי.

3. תהי X קבוצה ו- Σ אוסף תת קבוצות של X המקיים שלושה התנאים הבאים:

א) $X,\emptyset\in\Sigma$
ב) אם $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחת תת קבוצות כך ש- $F_\alpha\in\Sigma$ לכל $\alpha\in I$ אז
$$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha\in\Sigma$$
ג) אם $F_1,\dots,F_n$ משפחה סופית של תת קבוצות כך ש- $F_i\in\Sigma$ לכל i $(1\le i\le n)$ אז
$$\bigcup_{1\le i\le n}F_i\in\Sigma$$
הוכיחו ש- אוסף תת קבוצות $\mathrm{T}=\{F^c|F\in\Sigma\}$ הוא טופולוגיה על X.

4. (מההרצאה) יהי X מרחב טופולוגי.

א') יהיו $A \subseteq B \subseteq X$. הוכיחו שלהשרות טופולוגיה:

- ישירות מ-X ל-A או
- קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A -

זה אותו דבר.

ב') להראות שאם $F \subseteq A \subseteq X$ ו-F סגורה ב-X , אז F סגורה ב-A .

ג') להראות שאם $F \subseteq A \subseteq X$ ו-F סגורה ב- A ו-A סגורה ב- X אז F סגורה ב-X .