(1)

לינארית 2 - תרגול 4

תזכורת מסמס שעבר:

דיברנו על הצגת וקטור לפי בסיס.

אם $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל-V מ"ו. אז כל $v\in V$ ניתן לכתיב

כצ"ל של איברי B: $v=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n$

ואז $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = [v]_B =$ "הווקטור v לפי בסיס B"

דוג': (1) לפי הבסיס הסטנדרטי זה קל:

$V=\mathbb{R}^2$, $B=\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}$ אז $\binom{1}{3}=1\binom{1}{0}+3\binom{0}{1}$

$$\Rightarrow \left[\binom{1}{3}\right]_B=\binom{1}{3}$$

(2) $V=\mathbb{R}^3$, $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}5\\7\\-8\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+(-8)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}5\\7\\8\end{pmatrix}\right]_E=\begin{pmatrix}6\\+1\\-8\end{pmatrix}$$

(3) לתת דוג' עם $\mathbb{R}_2[x]$ או משהו..

מטריצת מעבר בין שני בסיסים מ-B_1 ל-B_2:

מטריצה זו מסומנת ב- $[I]^{B_1}_{B_2}$,

ומתקיים שלכל וקטור v

$$[I]^{B_1}_{B_2}[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$$

זא המטריצה מעבירה וקטור לפי בסיס B_1 לאותו וקטור לפי בסיס B_2

איך מוצאים אותה?

←

קס״ד

מציאת $[I]^{B_1}_{B_2}$ עבור $B_1=\{v_1,\dots,v_n\}$ $B_2=\{u_1,\dots,u_n\}$

$$[I]^{B_1}_{B_2} = \left([v_1]_{B_2} \; [v_2]_{B_2} \cdots [v_n]_{B_2} \right)$$

<u>דוגמא</u>: $V=\mathbb{R}^2$ $E_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$, $E_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}\right\}$ בסיסים

נמצא $[I]^{E_1}_{E_2}$

$$[I]^{E_1}_{E_2} = \left(\left[\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right]_{E_2} \; \left[\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right]_{E_2} \right)$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\3&8&-2\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&-1&-5\end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix}\beta=5\\ \alpha=-14\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]_{E_2} = \begin{pmatrix}-14\\5\end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&3&3\\3&8&-4\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&3&3\\0&-1&-13\end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix}\beta=13\\ \alpha=-36\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right]_{E_2} = \begin{pmatrix}-36\\13\end{pmatrix}$$

וסה״כ קיבלנו

$$[I]^{E_1}_{E_2} = \begin{pmatrix}-14 & -36\\5 & 13\end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: עבור B_1,B_2,B_3 בסיסים למ״ו V מתקיים

$$(1) \quad [I]^{B_2}_{B_3}[I]^{B_1}_{B_2} = [I]^{B_1}_{B_3}$$

$$(2) \quad \left([I]^{B_1}_{B_2}\right)^{-1} = [I]^{B_2}_{B_1}$$

<u>הערה</u>: כיוון שלכל בסיס B קל למצוא $[I]^{B}_{S}$ כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי (להסביר קצת...)

בס"ד

ולכן כדי למצוא $[I]^{B_1}_{B_2}$ ניתן את האלג' הבא:

א. למצוא $[I]^{B_1}_{S}$ (קל!)

ב. למצוא $[I]^{B_2}_{S}$ (קל!)

ג. למצוא $[I]^{S}_{B_2}$ ע"י: $[I]^{S}_{B_2}=\left([I]^{B_2}_{S}\right)^{-1}$

ד. $[I]^{B_1}_{B_2}=[I]^{S}_{B_2}\cdot[I]^{B_1}_{S}$

כעת,

I. נרצה לקודד העת"ל בתור מטריצות.
כלומר שעבור העת"ל T נמצא מטריצה A כך שבשביל למצוא $T(v)$
נצטרך סה"כ להכפיל את v ב-A כלומר $T(v)=Av$

II. ואפילו נכליל ונמצא מטריצות A כך שאם יש שני בסיסים B_1, B_2 ל-V
אז אם ניקח וקטור $[v]_{B_1}$ (לפי בסיס B_1) ונכפול אותו ב-A אז
נקבל $[T(v)]_{B_1}$
כלומר: המטריצה גם ביצעה על v את העתקה T וגם ביצעה מעבר בין בסיסים

מטריצה מייצגת של העת"ל

הגדרה: $T:V\to W$ העת"ל

E = בסיס כלשהו של V ונסמן $E=\{v_1,\dots,v_n\}$

F = בסיס כלשהו של W

$$[T]^{E}_{F}=\begin{pmatrix}[T(v_1)]_F & [T(v_2)] & \cdots & [T(v_n)]\end{pmatrix}$$

והיא המטריצה שמקיימת לכל $v\in V$

$$[T]^{E}_{F}[v]_E=[T(v)]_F$$

(4)

בס"ד

* אם סתם נרצה רק לקודד את העתקה בלי לעבור בין בסיסים
ז"א שאנו עובדים עם הבסיסים הסטנדרטיים

תרגיל:

1) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $T(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$

נרצה למצוא קידוד של ההעתקה (אם לא מצוינים בסיסים אז הכוונה לסטנדרטיים)

נסמן $S_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$[T]^{S_1}_{S_2}=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{S_2}\ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{S_2}\ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{S_2}\right)$$

$$=\left(\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_{S_2}\ \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{S_2}\ \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_{S_2}\right)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

2) עבור אותה העתקה כמו ב-1 נרצה למצוא $[T]^E_F$

כאשר $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

$F=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^2$

פתרון:

$$[T]^E_F=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_F\ \left[T\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_F\ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_F\right)=$$

$$=\left(\underbrace{\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_F}\ \underbrace{\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_F}\ \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_F\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\ \frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$\alpha=2$, $\beta=\frac{3}{2}$

$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$

המשך

ואכן מתקיים לכל v $\quad [T]^E_F \cdot [v]_E = [T(v)]_F$

לדוג': $\quad v=\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=9$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+2\\2+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+6.5\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}0\\2\\9\end{pmatrix}\right]_F = \begin{pmatrix}2\\6.5\end{pmatrix}$$

ואכן

$$\underbrace{[T]^E_F}_{\begin{pmatrix}2&0&0\\ 3/2&1/2&1/2\end{pmatrix}}\ \underbrace{[v]_E}_{\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}} = [T(v)]_F$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\ 3/2&1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6.5\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

משפטים:

1. $S,T: V\to W$ ה"ל אז:

E בסיס ל- V
F בסיס ל- W

$$[T+S]^E_F = [T]^E_F + [S]^E_F$$

2. $\underset{\text{עם בסיס } E}{V} \xrightarrow{T} \underset{\text{עם בסיס } F}{W}$, $\quad S: \underset{\text{עם בסיס } F}{W} \to \underset{\text{עם בסיס } H}{U}$

אזי

$$[\underbrace{S\circ T}_{\text{הרכבה}}]^E_H = [S]^E_H \underbrace{\cdot}_{\text{כפל מטריצות}} [T]^E_F$$

3. אם T הפיכה אזי $\quad [T^{-1}]^F_E = \left([T]^E_F\right)^{-1}$

בס״ד

משפט: העתקה היא הפיכה $\Longleftrightarrow$ הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $\neq 0$

תרגיל 316: $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 2}$ ע״י $T(A)=A^T$

<**סימון:** $[T]_E$ הכוונה $[T]_E^E$ >

מצא $[T]_E$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_E=[T]_E^E=\left(\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_E\right)$$

$$=\left(\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_E\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$