טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 3

שאלה 1

הראה שהיחס $f \underset{A}{\simeq} g$ על העתקות $(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ הוא יחס שקילות.

הוכחה:

צריך להראות שהיחס $\underset{A}{\simeq}$ על העתקות כנ"ל הינו:

א. רפלקסיבי: נגדיר $H: X\times I\longrightarrow Y$ לכל $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ ע"י:

$$H(x,t) = f(x)$$

H מקיימת את התכונות הבאות:

(1) H רציפה, כי f רציפה.

(2) $H(x,0)=H(x,1)=f(x)$ לכל $x\in X$.

(3) $H(a,t)=H(a,0)=f(a)$ לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$.

לכן H הומוטופיה מ-f ל-f שבה A אינה משתנה, כלומר $f\underset{A}{\simeq} f$.

ב. סימטרי: נניח כי $f\underset{A}{\simeq} g$. לכן קיימת הומוטופיה $H:X\times I\longrightarrow Y$ מ-f ל-g, כך שלכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $H(a,t)=H(a,0)$.

נגדיר $K:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י $K(x,t):=H(x,1-t)$.

הוכחנו שזו הומוטופיה מ-g ל-f כשהוכחנו ש-~ יחס שקילות.

כמו כן, לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $K(a,t)=H(a,1-t)=H(a,1)=K(a,0)$.

לכן K הומוטופיה מ-g ל-f, כנדרש.

ג. טרנזיטיבי: נניח כי $f\underset{A}{\simeq} g$ וכי $g\underset{A}{\simeq} h$, כלומר קיימות הומוטופיות $H,K:X\times I\longrightarrow Y$, H מ-f ל-g ו-K מ-g ל-h, כך שלכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $H(a,t)=H(a,0)$ ו- $K(a,t)=K(a,0)$.

נגדיר $S:X\times I\longrightarrow Y$ ע"י $S(x,t)=\begin{cases}H(x,2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ K(x,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$.

הוכחנו שזו הומוטופיה מ-f ל-h, כשהוכחנו ש-~ יחס שקילות.

כמו כן, לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$,

$$S(a,t)=\begin{cases}H(a,2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ K(x,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}=\begin{cases}H(a,0), & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ \underset{H(a,\frac{1}{2})=H(a,0)}{\underset{\shortparallel}{K(a,\frac{1}{2})}}, & t\in[0,\frac{1}{2}]\end{cases}=H(a,0)=S(a,0)$$

שאלה 2

הראה שאם $h,h':(X,A)\to(Y,B)$ מקיימות $h \underset{A}{\simeq} h'$, ושאם $k,k':(Y,B)\to(Z,C)$ מקיימות $k \underset{B}{\simeq} k'$, אזי $k\circ h \underset{A}{\simeq} k'\circ h'$.

<u>הוכחה:</u>

$h \underset{A}{\simeq} h'$, ולכן קיימת הומוטופיה $H:X\times I\to Y$ מ-h ל-h', כך שלכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $H(a,t)=H(a,0)$.

$k \underset{B}{\simeq} k'$, ולכן קיימת הומוטופיה $K:Y\times I\to Z$ מ-k ל-k', כך שלכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $K(a,t)=K(a,0)$.

בשאלה הקודמת הוכחנו ש-$\underset{A}{\simeq}$ יחס שקילות לכל A.

לכן, לפי הטרנזיטיביות, מספיק להוכיח $k\circ h \overset{\text{א}}{\underset{A}{\simeq}} k\circ h' \overset{\text{ב}}{\underset{A}{\simeq}} k'\circ h'$.

א. נגדיר $S:X\times I\to Z$ ע"י $S=k\circ H$. אזי:

(1) S רציפה כהרכבת פונקציות רציפות.

(2) לכל $x\in X$, $S(x,0)=k(H(x,0))=k(h(x))=(k\circ h)(x)$

$S(x,1)=k(H(x,1))=k(h'(x))=(k\circ h')(x)$

(3) לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $S(a,t)=k(H(a,t))=k(H(a,0))=S(a,0)$.

לכן $k\circ h \underset{A}{\simeq} k\circ h'$.

ב. נגדיר $T:X\times I\to Z$ ע"י $T(x,t)=K(h'(x),t)$, כלומר מתקיים $T=K\circ(h'\times Id_I)$.

(1) T רציפה, כהרכבה של פונקציות רציפות.

(2) לכל $x\in X$, $T(x,0)=K(h'(x),0)=k(h'(x))=(k\circ h')(x)$

$T(x,1)=K(h'(x),1)=k'(h'(x))=(k'\circ h')(x)$

(3) לכל $a\in A$ ולכל $t\in I$, $T(a,t)=K(\underset{\in B}{h'(a)},t)=K(h'(a),0)=T(a,0)$.

לכן $k\circ h' \underset{A}{\simeq} k'\circ h'$.

שאלה 3

יהיו $f,g:(X,a)\to(Y,b)$ שתי העתקות שהומוטופיות זו לזו ביחס ל-$\{a\}$.

הוכח ש- $f_*=g_*$.

הוכחה:

נתון $f\simeq_{\{a\}} g$, ולכן קיימת הומוטופיה $H:X\times I\longrightarrow Y$ מ-f ל-g כך שלכל $t\in I$, $H(a,t)=H(a,0)$.

תהי $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$. רוצים להוכיח שמתקיים $f_*([\varphi])=g_*([\varphi])$. שוויון זה שקול לשוויון $[f\circ\varphi]=[g\circ\varphi]$. נוכיח $f\circ\varphi\simeq_{\dot I} g\circ\varphi$. זה נובע מהשאלה הקודמת.

שאלה 4

יהי X קשיר מסילתית, ויהיו $a,b\in X$.

נראה ש- $\pi_1(X,a)$ אבלית אם ורק אם לכל שתי מסילות δ,γ מ-a ל-b מתקיים $F_\gamma=F_\delta$.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש- $\pi_1(X,a)$ אבלית, ויהיו δ,γ שתי מסילות מ-a ל-b.

נסתכל על $F_\delta^{-1}\circ F_\gamma$: לכל $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$,

$$F_\delta^{-1}(F_\gamma([\varphi])) = \underbrace{[\delta][\bar\gamma]}_{\pi_1(X,a)}\underset{\pi_1(X,a)}{[\varphi]}[\gamma][\bar\delta] \underset{\text{אבלית } \pi_1(X,a)}{=} [\varphi][\delta][\bar\gamma][\gamma][\bar\delta] = [\varphi]\underbrace{[\delta][k_b]}_{[\delta]}[\bar\delta] =$$

$$= [\varphi][\delta][\bar\delta] = [\varphi][k_a] = [\varphi]$$

לכן $F_\delta^{-1}\circ F_\gamma = Id_{\pi_1(X,a)}$ נכפול ב F_δ, ונקבל $F_\gamma=F_\delta$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל שתי מסילות δ,γ מ-a ל-b מתקיים $F_\gamma=F_\delta$.

יהיו $[\varphi],[\psi]\in\pi_1(X,a)$, ותהי γ מסילה מ-a ל-b. גם $\varphi*\gamma$ מסילה מ-a ל-b, ולכן $F_\gamma=F_{\varphi*\gamma}$. נציב $[\psi]$, ונקבל

$$F_\gamma([\psi]) = F_{\varphi*\gamma}([\psi]) \Rightarrow [\bar\gamma][\psi][\gamma] = [\bar\gamma][\bar\varphi][\psi][\varphi][\gamma]$$

$$\Rightarrow [\psi] = [\bar\varphi][\psi][\varphi] \Rightarrow [\varphi][\psi] = [\psi][\varphi]$$

ולכן $\pi_1(X,a)$ אבלית.