

חשבון אינפיניטסימלי 2 | תש"ע מועד ב'

פתרון המבחן | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

מרצה: שחר נבו
(לפי מיקוד תשפ"ב)

שאלה 1

ב) חשב $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(סעיף ב)

נשים לב שהמכנה שואף ל-0, וגם המונה ל-0 ($1 - 1 = 0$) לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + xe^{-x^2/2}}{4x^3}$$

ושוב לופיטל

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) + e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2}}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - xe^{-x^2/2} - 2xe^{-x^2/2} + x^3 e^{-x^2/2}}{24x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} + 2x^2 e^{-x^2/2} + 3x^2 e^{-x^2/2} - x^4 e^{-x^2/2}}{24}$$

$$= \frac{1 - 1 - 2}{24} = \boxed{\frac{-1}{12}}$$

שאלה 2

הראה כי למשוואה $x = \cot(x)$ פתרון יחיד ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$

(פתרון)

ראשית, עבור $x = 0$ לא מוגדר.

נגדיר $f(x) = x - \cot(x)$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sin^2(x)}$$

מתקיים בתחום

$$0 < \sin(x) < 1$$

לכן

$$1 + \frac{1}{\sin^2(x)} > 1 + 1 = 2$$

כלומר היא עולה (ואינה שווה 0)

בנוסף $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, וכן $f(\frac{\pi}{2}) > 1$,

לכן מערך הביניים קיים $x = a$ פתרון בתחום.

נניח בשלילה שקיים $x' \neq a$ נוסף שהוא פתרון למשוואה, אזי הקטע $[a, x']$ (או $[x', a]$) קבוע בסתירה לכך שהנגזרת שונה מאפס.

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^4(x) dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 2} dx$$

$$\int_0^1 x^2 \log(x) dx$$

(סעיף א)

ניעזר בזהויות טריגונומטריות

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\frac{\cos(2x) + 1}{2} = \cos^2(x)$$

ונעלה בריבוע

$$\cos^4(x) = \frac{\cos^2(2x) + 2\cos(2x) + 1}{4}$$

נציב את $\cos^2(2x)$ לפי זהות לעיל.

$$= \frac{\frac{\cos(4x)+1}{2} + 2\cos(2x) + 1}{4}$$

ונחשב

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^4(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} dx$$

$$= \left[\frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{16}}$$

(סעיף ב)

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 2} dx = \int 1 + \frac{2}{x^2 - 2} dx$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{2}{x^2 - 2} = \frac{A}{x - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + \sqrt{2}}$$

$$2 = Ax + \sqrt{2}A + Bx - \sqrt{2}B$$

$$(A + B)x + (\sqrt{2}A - \sqrt{2}B - 2) = 0$$

קיבלנו מערכת משוואות

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \sqrt{2}A - \sqrt{2}B - 2 = 0 \end{cases}$$

נקבל $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ לבסוף,

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 2} dx = \int 1 + \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})}{x - \sqrt{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \sqrt{2}} dx$$

$$= \boxed{x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\log(x - \sqrt{2}) - \log(x + \sqrt{2})) + c}$$

(סעיף ג)

$$\int_0^1 x^2 \log(x) dx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\left[\begin{array}{ll} v = \frac{x^3}{3} & u = \log(x) \\ dv = x^2 dx & du = \frac{dx}{x} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u dv &= uv|_0^1 - \int_0^1 v du \\
&= \left[\frac{\log(x) \cdot x^3}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \left[\frac{\log(x) \cdot x^3}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx \\
&= \left[\frac{\log(x) \cdot x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{9} \right]_0^1 \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x) \cdot x^3}{3} \right) - \frac{1}{9} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x) \cdot x^3}{3} \right) - \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

נחשב

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x) \cdot x^3}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{3}{x^3}}$$

נפעיל לופיטל (המקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ "),

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0$$

לבסוף נקבל

$$\boxed{\frac{-1}{9}}$$

שאלה 4

ב) תהי פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, a]$. נגדיר סדרת פונקציות ב- $[0, a]$ באופן הבא:

$$f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t) dt$$

לכל $0 \leq x \leq a$, $n \geq 1$. הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש ל- $[0, a]$.

(פתרון)

מאינטגרביליות $f_0(x)$, היא חסומה ושינו M כך ש $|f_0(x)| \leq M$ כעת מטענה ידועה

$$|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_0(t)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx$$

$$|f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_1(t)| dt \leq \int_0^x Mx dt = \frac{Mx^2}{2}$$

ובאופן כללי באינדוקציה

$$|f_n(x)| \leq \frac{Mx^n}{n!}$$

בסיס הראינו.

צעד יהי n שהטענה נכונה בעבורו, נראה בעבור $n+1$,

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x f_n(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_n(t)| dt \leq \int_0^x \frac{Mx^n}{n!} dt = \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

וסיימנו.

כעת נראה כי

$$\epsilon_n := \begin{cases} \sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - f(x)| & \text{exists supremum if} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \rightarrow 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \left| \frac{Mx^n}{n!} \right| \leq \left| \frac{Ma^n}{n!} \right|$$

■ נשים לב כי $\frac{Ma^n}{n!} \rightarrow 0$ ובפרט קיים N שממנו ואילך נקבל $\epsilon <$ כדרוש.

שאלה 5

א) מצאו רדיוס התכנסות r עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-2)^n)x^n$ ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.
ב) חשב הסכום $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$

(סעיף א)

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|1 - (-2)^n|}}$$

למדנו באינפי 1, שאם ישנן שתי סדרות שמכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו גבול אזי זהו גבול הסדרה, נסתכל על הזוגיים והאי זוגיים

$$r_1 = \frac{1}{\limsup \sqrt[2n]{|1 - 4^n|}} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[2n+1]{|1 + 2 \cdot 4^n|}} = \frac{1}{2}$$

בעבור $x = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-2)^n) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - (-1)^n$$

אשר לא מתכנס.

בעבור $x = -\frac{1}{2}$, בדומה

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-2)^n) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

סך הכל תחום ההתכנסות $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(סעיף ב)

תחום ההתכנסות הוא

$$r = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n+2}} = 1$$

בעבור $x = 1, -1$ לא נקבל התכנסות. סך הכל תחום התכנסות $(-1, 1)$

נפצל לסכומים (נראה ששני הסכומים מתכנסים)

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 2x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

f_n הן פונקציות גזירות, וכן $\sum f'_n(x)$ מתכנסת במ"ש (ניתן להראות עם מבחן החסם). בנוסף, בעבור $c = 0$ מקבלים התכנסות של הטור $\sum f_n(c)$, לכן ניתן להפעיל גזירה איבר איבר.

$$\begin{aligned} &= x \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' + \frac{2}{1-x} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' + \frac{2}{1-x} \\ &= x \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \frac{2}{1-x} = \boxed{\frac{-x+2}{(1-x)^2}} \end{aligned}$$

שאלה 6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

נגדיר

(א) חשב $f'(0)$

(ב) הראה כי f גזירה ב \mathbb{R} מכל סדר.

(סעיף א)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - h}{h^2} \end{aligned}$$

וניעזר בלופיטל (המקרה $\frac{0}{0}$),

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)}{2} = 0$$

(סעיף ב)

(פתרון של אורי מימון)

ידוע כי:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

כעת, רדיוס ההתכנסות הוא

סדרת המקדמים של טור החזקות הינה

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} & \text{even is } n \\ 0 & \text{odd is } n \end{cases}$$

וראינו בהרצאה שאם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אזי

$$\forall n \in \mathbb{N} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

(ניתן להראות ש 0 בתחום ההתכנסות)

כלומר

$$a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n+1} \text{ זוגי } n \text{ בעבור}$$

$$a_n = 0 \text{ אי-זוגי } n \text{ בעבור}$$

מקבלים סך הכל

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n+1} & \text{even is } n \\ 0 & \text{odd is } n \end{cases}$$

וקיבלנו ש f גזירה מכל סדר ב \mathbb{R} עבור $x = 0$,
אחרת, לכל $x \neq 0$ מדובר בפונקציה $\frac{\sin(x)}{x}$ שגזירה מכל סדר ב \mathbb{R} .

■