

פירוק Cholesky

הגדרה: תהי A מטריצה. אם מתקיימים התנאים הבאים אז ל- A יש פירוק $Cholesky$:

$$(1) \quad A^T = A \text{ כלומר, סימטרית, כלומר } A^T = A$$

(2) A מטריצה חיובית לחלוטין, כלומר (צריך שאחד התנאים הבאים יתקיים מאחר והם שקולים) -

- כל הע"ע של המטריצה A חיוביים.
- כל המינורים הראשיים של A חיוביים.
- $\forall \vec{x} \neq 0$ מתקיים - $\vec{x}^T * A * \vec{x} > 0$.

דוגמה:

נתונה המטריצה -

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A אכן סימטרית (ניתן לראות).

נבדוק מינורים ראשיים -

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

לכן למטריצה A יש פירוק $Cholesky$.

הערה:

פקודה ב- $MATLAB$ שמבצעת את הפירוק - $chol(A)$.

משפט: בהינתן מטריצה A סימטרית ומוגדרת חיובית לחלוטין, ניתן לפרק אותה באופן הבא:

$$U = \underbrace{D}_{\substack{\text{מטריצה} \\ \text{אלכסונית}}} + \underbrace{U_1}_{\text{השאר}} - \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}} \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}}$$

מכאן –

$$A = (L\sqrt{D}) * (L\sqrt{D})^T$$

נסמן $R = L\sqrt{D}$ ונקבל –

$$A = R * R^T$$

וכעת, על מנת למצוא את הפתרון של המערכת $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$R * \underbrace{R^T * \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} R * \vec{y} = \vec{b} \\ R^T * \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

על מנת למצוא פתרון (כלומר את \vec{x}) נבצע חילוף לפנים ולאחור ונמצא את \vec{y} . הסיבה לביצוע של חילוף (הצבה לאחור או הצבה לקדימה) היא כי R משולשית תחתונה ו- R^T משולשית עליונה.

דוגמה:

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

נבדוק את התנאים לפירוק *Cholesky*:

$$(1) \quad A^T = A \text{ סימטרית כי}$$

(2) נבדוק מינורים ראשיים:

$$|1| = 1 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{vmatrix} = 12 < 0$$

ולכן ניתן לעשות פירוק *Cholesky*.**נבצע פירוק LU:**

נרצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{אחרי דירוג}} U$$

לכן –

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2: R_2 - 4R_1 \\ R_3: R_3 - 5R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3: R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נשמור את כל פעולות השורה על המטריצה A ונזכור שפעולות שורה שקולה להכפלת המטריצה A במטריצה אלמנטרית.

וכעת –

$$R_2: R_2 - 4R_1 \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3: R_3 - 5R_1 \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3: R_3 - 3R_2 \Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ידוע ש-

$$E_3 * E_2 * E_1 * A = U \quad / * (E_3 * E_2 * E_1)^{-1}$$

(למטריצות אלמנטריות קיימת הופכית)

לכן –

$$A = (E_3 * E_2 * E_1)^{-1} * U$$

$$A = \underbrace{E_1^{-1} * E_2^{-1} * E_3^{-1}}_L * U$$

נמצא את $E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1}$:

$$E_1^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2: R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{E_1^{-1}}$$

$$E_2^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3: R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{E_2^{-1}}$$

$$E_3^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3: R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3^{-1}}$$

נמצא את L :

$$L = E_1^{-1} * E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

יודוע גם מקודם –

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כלל אצבע: בפירוק LU , במטריצה L על האלכסון הראשי תמיד 1, כלומר $\forall i l_{ii} = 1$ (פירוק דוליטל).

– כעת –

$$U = D + U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומאחר והמטריצה \sqrt{D} היא עדיין אלכסונית עם שורש באיברים על האלכסון (של D) נקבל ש-

$$R = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

– נזכור כי –

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A = R * R^T$$

– ולכן –

$$R * \underbrace{R^T * \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) R * \vec{y} = \vec{b} \\ (2) R^T * \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

– לכן –

$$R^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

שיטות איטרטיביות למציאת וקטור פתרונות:

הרעיון: ניקח את המערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ ונמצא קירוב איטרטיבי לווקטור \vec{x} ע"י –

$$\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$$

כאשר B מטריצה ו c וקטור.

הערה:

כל מטריצה ניתן לכתוב –

$$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}} + \underbrace{D}_{\substack{\text{אלכסונית}}} + \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

שיטת יעקובי:

$$A = (L + U) + D$$

$$\Rightarrow [(L + U) + D]\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + U)\vec{x} + D\vec{x} = \vec{b}$$

$$D\vec{x} = \vec{b} - (L + U)\vec{x} \quad /* \quad D^{-1}$$

$$\boxed{\vec{x} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}}$$

ניתן לכתוב גם –

$$\vec{x}_{new} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}_{old}$$

$$\vec{x}_{k+1} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}_k$$

ולכן לפי הסימונים ממקודם –

$$B = -D^{-1}(L + U)$$

$$\vec{c} = D^{-1}\vec{b}$$

משפט להתכנסות (תנאי מספיק אך לא הכרחי): אם A מטריצה בעלת תנאי אלכסון שולט,

אזי, השיטה האיטרטיבית תתכנס לכל ניחוש התחלתי \vec{x}_0 ולכן למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד.

תנאי של אלכסון שולט –

$$\forall i |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

לדוגמה:

עבור המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

יש תנאי של אלכסון שולט מאחר ו-

$$|3| > |-1| + |-1|$$

$$|2| > |0| + |-1|$$

$$|8| < |1| + |1|$$

הערה:

אם למטריצה A אין אלכסון שולט זה לא אומר שאין התכנסות לשיטה האיטרטיבית. לכן בא גם המשפט הבא –

משפט להתכנסות (תנאי מספיק): צריך שיתקיים ש-

$$\|B\| < 1$$

עבור כל נורמה (L_1, L_2, L_∞) עבור הסימונים מקודם (כלומר עבור B המקיימת –
 $\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$).

הערה:

מעין הוכחה למשפט הקודם -

$$\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = B * \vec{x}_k + \vec{c} - (B * \vec{x}_{k-1} + \vec{c}) = B * (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})$$

$$\underbrace{\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|}_{> \text{שגיאה}} = \|B * (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| \leq \|B\| * \|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|$$

לכן $\|B\| < 1$ (כדי שהשיטה תתכנס רוצים שהשגיאה תקטן).

משפט (תנאי מספיק והכרחי): המטריצה B המקיימת –

$$\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k + \vec{c}$$

צריך שיתקיים –

$$\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i(B)|\} < 1$$

על מנת שהשיטה האיטרטיבית תתכנס ($\rho(B)$ הינה הרדיוס הספקטרלי של B).

תרגיל:

נתון –

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

עם ניחוש התחלתי $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(א) הוכח שהמערכת מתכנסת בשיטה האיטרטיבית (של יעקובי).

(ב) כתוב נוסחה איטרטיבית למציאת הקירוב.

(ג) בצע 6 איטרציות.

פתרון:

סעיף א':

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

נבדוק אלכסון שולט –

$$|4| > |2| + |0|$$

$$|10| > |2| + |4|$$

$$|5| > |4| + |0|$$

לכן למטריצה A יש תנאי של אלכסון שולט ולכן השיטה מתכנסת.

■

סעיף ב':

$$A = L + D + U \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לקן –

$$B = -D^{-1}(L + U) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = D^{-1} * \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את הנוסחה האיטרטיבית –

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

(סעיף ג' בתרגול הבא!!!)