<u>משפט</u>: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).

2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$1 \Leftarrow 2$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f : X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a,b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה
$f_{a,b} : X \to [0,1], f(a) = 0, f(b) = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{ f_s = f_{a,b} \mid a \neq b \}$ (ז"א $s = (a,b), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$ $f : X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

<u>משפט</u> *(האוניברסליות של קוביות* Tychonoff*)*

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$

2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

הוכחה:

$1 \Leftarrow 2$

$X \in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $C(X,[0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f = \Delta_{s\in S} f_s : \mathrm{X} \to [0,1]^S$ שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

$2 \Leftarrow 1$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

<u>תוצאה חשובה</u>: $X \in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

<u>משפט</u> (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in Metriz \cap B_2$ (שקול: $X \in Metriz \cap Sep$).
2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

<u>הוכחה:</u>

$1 \Leftarrow 2$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

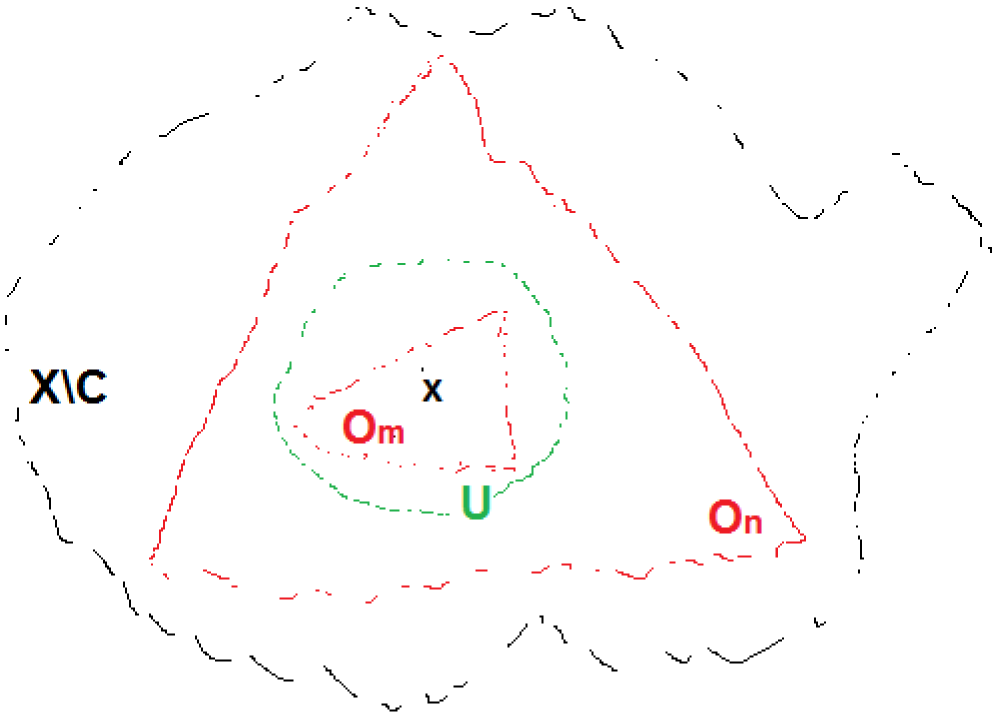
נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \to [0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0,\ f_{m,n}(\mathrm{X} \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x\notin C$ ו C סגורה. $\gamma=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור סביבה פתוחה $O_n\in\gamma$ כך ש $x\in O_n\subset X\setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U\in N(x)$ כך ש $\overline{U}\subseteq O_n$

(למשל כדור $x\in U=B(x,\varepsilon)\subset\overline{B(x,\varepsilon)}\subset B[x,\varepsilon]\subset O_n$).

$\gamma=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m\in\gamma$ כך ש $x\in O_m\subseteq U$. נקבל

$$x\in O_m\subseteq\overline{O_m}\subseteq\overline{U}\subseteq O_n\subseteq X\setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n}:X\to[0,1]$ מפרידה x,C (כי היא מפרידה $\overline{O_m},X\setminus O_n$)

$2\Rightarrow 1$

$[0,1]^{\mathbb{N}}\in Metriz\cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תורשתיות).

☺

מידע:

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$

(ראו למשל ספר מצויין: J.R. Munkres, Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

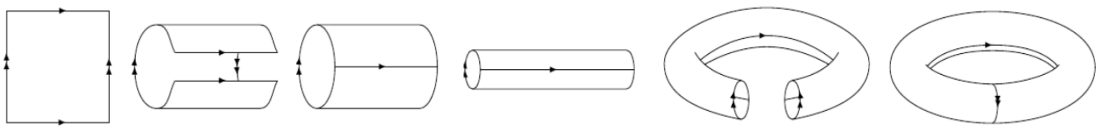
ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתוך מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

$$\varphi:[0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2 \quad (a_1,a_2,a_3,\cdots) \mapsto (a_1,\tfrac{1}{2}a_2,\tfrac{1}{3}a_3,\cdots)$$

טופולוגית מנה -- Quotient topology

למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר: תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".

למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

נניח (X,τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה ? מה הן ההגדרות המתאימות ?

תזכורת (מתורת הקבוצות) נניח $\sim$ יחס שקילות במרחב (X,τ). נסמן:

- $[a]:=\{x \in X \mid a \sim x\}$ מחלקה של איבר a
  (תמיד $a \in [a]$ ויש חלוקה $X = \coprod_{a\in X}[a]$)
- $X/\sim = \{[a] : a \in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות

- $a \mapsto [a] \quad \rho : X \to X/\sim$ "פונקציה (העתקה) טבעית" (תמיד **על**)

שאלה: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב $X/\sim$ כאשר X מ"ט ?

שקול: נתונה פונקציה על $\mathrm{q} : X \to Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $q(a) = q(b) \Leftrightarrow a \sim b$ אז נקבל יחס שקילות כך ש

Y וקבוצת מנה $X/\sim$ הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $\mathrm{q} : X \to Y$.

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $\mathrm{q} : X \to Y$. אומרים ש σ **טופולוגית המנה** (ביחס לפונקציה $\mathrm{q} : (X,\tau) \to Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $\mathrm{q} : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $\mathrm{q} : (X,\tau) \to (Y,\lambda)$ רציפה אז $\lambda \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $\mathrm{q} : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

תאור של טופולוגית המנה: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid \quad q^{-1}(O) \in \tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X.

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע ?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q: X \to Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f: Y \to Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) רציפה ההרכבה $f \circ q : X \to Z$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: נניח $f \circ q : X \to Z$ רציפה. צ"ל $f: Y \to Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z.

נתון ש $q: X \to Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X. אבל

$q^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ q)^{-1}(O)$ ונתונה רציפות של $f \circ q : X \to Z$.

☺

תוצאה: נניח $q:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q: X \to Y$.

ז"א אם $q:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma \subseteq \sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f: Y \to Z$ ניקח $id:(Y,\sigma) \to (Y,\gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q: X \to Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q: X \to Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ **פתוחה** ב X עבור $O \subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y.

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q **על** לכן $q(q^{-1}(O)) = O$ חייבת להיות פתוחה.

☺

תוצאה: כל הטלה $X_{i_0} \to X_i : \prod_{i\in I} X_i \; \mathrm{p}_{i_0}$ היא פונקצית מנה.

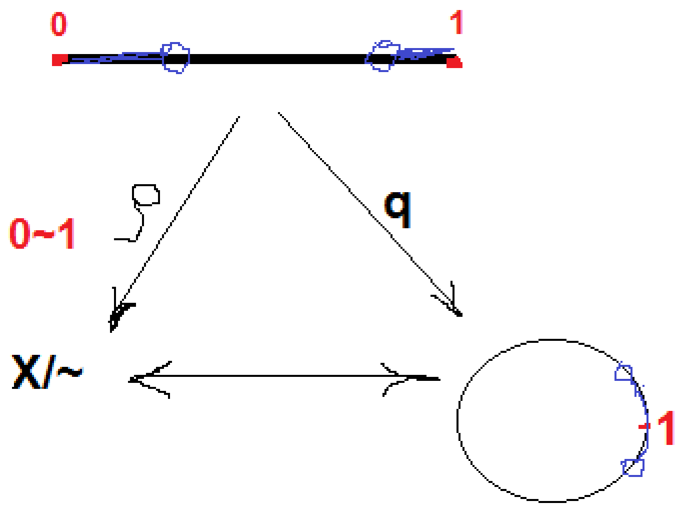
תוצאה: נניח $\mathrm{f}: X \to Y$ רציפה, על $X \in Comp, Y \in T_2$. אז f פונקצית מנה.

דוגמה: $\mathrm{f(x)} = \mathrm{cis}(2\pi\, \mathrm{x})$ $\quad f: X = [0,1] \to Y = T = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \|z\| = 1\}$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: כאן אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \to X/\sim \,\cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $\mathrm{id}: (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $\mathrm{id}^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $\mathrm{id}: (\mathrm{X}, \tau_1) \to (\mathrm{X}, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h(\mathrm{x}) = \mathrm{cis}(2\pi\, \mathrm{x})$ $\quad \mathrm{h}: X = [0,1) \to Y = T = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \|z\| = 1\}$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A:=\{z\in T\,|\,0\le \arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A)=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$
אבל A לא פתוח ב T.

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $f:X\to Y$ העתקת מנה $A\subseteq X$.
ופונקצית על שמושרית $f_A:A\to f(A)$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A=[0,1)\subset X=[0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1:X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy=1\}\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ לא מנה.

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("יותר מהמקור"). למשל:

ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (מדוע ?)

כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור (מדוע ?).

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: עבור הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\{0,1\},\quad f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 1\le x\end{cases}$

טופולוגית מנה על $Y=\{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$.

$f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1.

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$
הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)