

תורת המשחקים - שיעור 7

אסטרטגיות מעורבות - המשך

אסטרטגיות מעורבות - הגדרה

- ▶ יהי G משחק אסטרטגי כך שלכל שחקן יש מספר סופי או בן מניה של אסטרטגיות.
- ▶ נגדיר משחק G' שנקרא הרחבת G בעזרת אסטרטגיות מעורבות:
- ▶ לשחקן $i \in I$ נגדיר אסטרטגיה p_i להיות וקטור שמתאים לכל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ הסתברות $p_i(x_i) \in [0,1]$.
- ▶ ומתקיים

$$\sum_{i \in I} p_i(x_i) = 1$$

- ▶ ופונקציות תועלת

$$u_i(p_i, p_{-i}) = \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

משחק טניס

- ▶ נדמה מצב במשחק טניס בין סרינה ויליאמס ומריה שראפובה.
- ▶ ויליאמס (שחקנית 1) צריכה לחבוט לכיוונה של שראפובה (שחקנית 2) והיא צריכה להחליט האם לחבוט ל**שמאלה** או ל**ימינה** של שראפובה.
- ▶ שראפובה צריכה להחליט אם היא מתכוננת לחבטה שתבוא מ**ימינה** או מ**שמאלה**.

מטריצת האסטרטגיות



ℓ

r



L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

האם יש במשחק זה אסטרטגיות נשלטות? האם יש שיווי משקל נאש?

ניתוח המשחק

- ▶ בכל מקרה עדיף לשחקנית שלא לבחור באסטרטגיה קבועה אחת, מדוע?
- ▶ אנחנו יודעים לפי **משפט נאש (שיעור 6)**, שאם נכניס למשחק אסטרטגיות מעורבות לשתי השחקניות, אז קיים שיווי משקל נאש.
- ▶ לעומת משחקים פשוטים יותר כמו **זוג או פרט**, קשה יותר לנחש את נקודת שיווי המשקל.

טניס – באסטרטגיות מעורבות

▶ ויליאמס תבחר באסטרטגיה L בהסתברות p ובאסטרטגיה R בעדיפות $1 - p$.

▶ שראפובה תבחר באסטרטגיה ℓ בעדיפות q ובאסטרטגיה r בעדיפות $1 - q$.

חישוב פונקציות התועלת

כעת פונקצית התשלום של ויליאמס היא ▶

$$\begin{aligned}u_1([p, 1-p], [q, 1-q]) &= \\&= pu_1(L, [q, 1-q]) + (1-p)u_1(R, [q, 1-q]) \\&= pq u_1(L, \ell) + p(1-q)u_1(L, r) + \\&\quad + (1-p)q u_1(R, \ell) + (1-p)(1-q)u_1(R, r) \\&= 50pq + 80p(1-q) + \\&\quad + 90(1-p)q + 20(1-p)(1-q) \\&= (-100q + 60)p + 70q + 20\end{aligned}$$

חישוב פונקציות התועלת - המשך

בצורה דומה, ניתן לחשב את פונקצית התועלת של שראפובה: ▶

$$\begin{aligned}u_2([p, 1-p], [q, 1-q]) &= \\&= 50pq + 20p(1-q) + \\&\quad + 10(1-p)q + 80(1-p)(1-q) \\&= (100p - 70)q - 60p + 80\end{aligned}$$

תגובה מיטבית של כל שחקנית

- ▶ נחשב את התגובה המיטבית של ויליאמס אל מול אסטרטגיה מעורבת של שראפובה:

$$BR_1([q, 1-q]) = ?$$

- ▶ כרגיל, צריך למצוא את הערך p בו הפונקציה u_1 מקבלת מקסימום, כאשר q הוא קבוע.
- ▶ הפונקציה u_1 היא לינארית ב p ולכן נק' המקסימום נקבעת ע"פ סימן השיפוע.
- ▶ השיפוע הוא $-100q + 60$

תגובה מיטבית של כל שחקנית - המשך

מכאן נקבל: ▶

$$BR_1(q) = \begin{cases} 1 & q < \frac{6}{10} \\ [0,1] & q = \frac{6}{10} \\ 0 & q > \frac{6}{10} \end{cases}$$

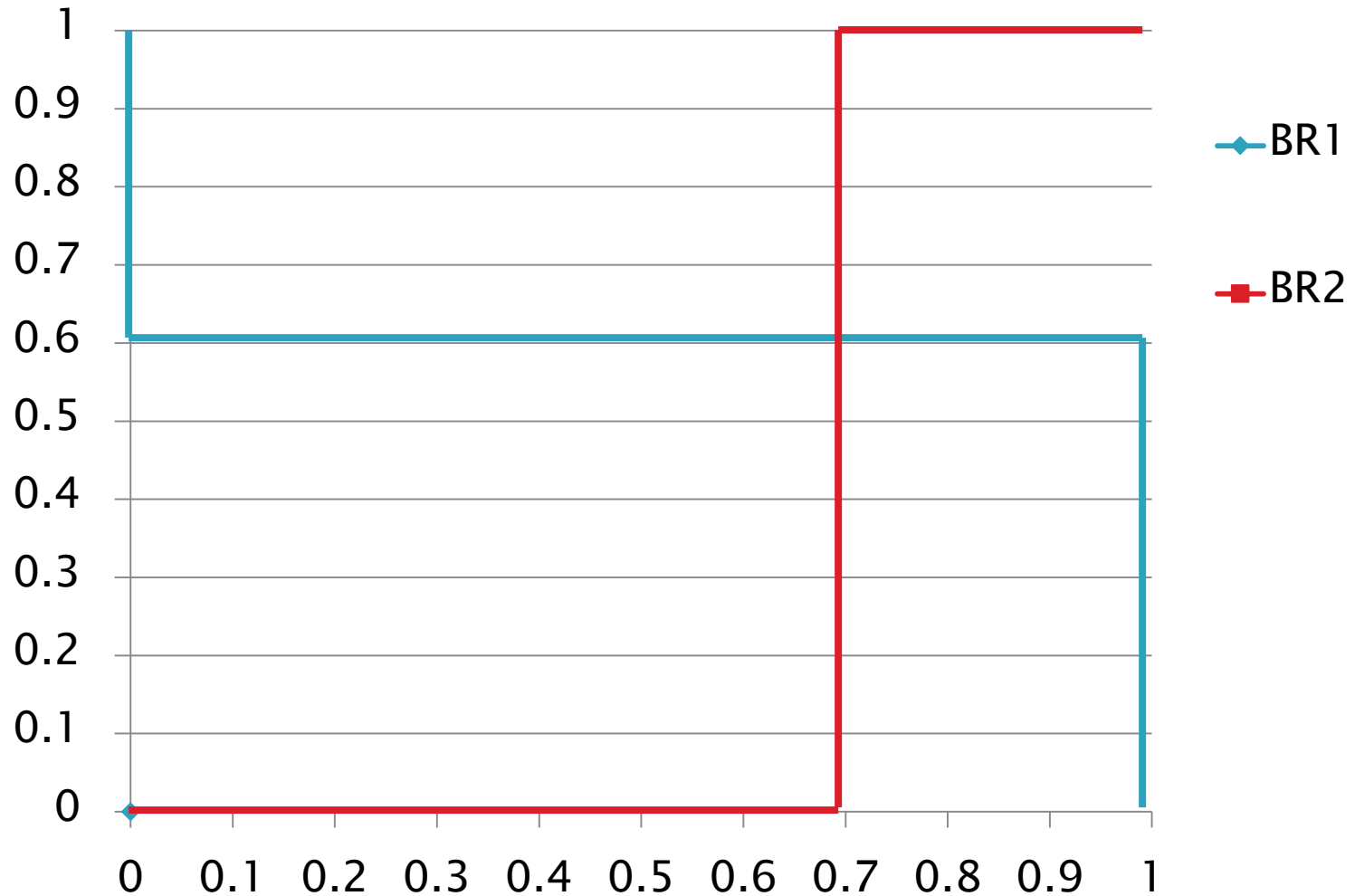
תגובה מיטבית של כל שחקנית - המשך

▶ בצורה דומה מחשבים את התגובה המיטבית של שראפובה.

▶ השיפוע של הפונקציה u_2 הוא $100p - 70$.

$$BR_2(p) = \begin{cases} 0 & p < \frac{7}{10} \\ [0,1] & p = \frac{7}{10} \\ 1 & p > \frac{7}{10} \end{cases}$$

מציאת נקודת שיווי משקל



▶ שיווי המשקל מתקבל בנקודה $(p, q) = (\frac{7}{10}, \frac{6}{10})$.

▶ לויליאמס לחבוט בעדיפות קלה לשמאלה של שראפובה, ועל שראפובה להיות מוכנה יותר (במידה מועטה) לכדור שמגיע משמאל.

▶ נראה כעת שיש דרך קלה יותר להגיע אל התוצאה!!!

אסטרטגיה מעורבת שהיא תגובה מיטבית

▶ **משפט:** נניח שאסטרטגיה מעורבת p_i של שחקן i היא תגובה מיטבית של השחקן לצירוף האסטרטגיות p_{-i} של שאר השחקנים. אזי כל אסטרטגיה s_i המופיעה ב p_i עם הסתברות חיובית חייבת להיות גם כן תגובה מיטבית לצירוף p_{-i} .

▶ **מסקנה:** בתנאי המשפט כל התשלומים של אסטרטגיות s_i המופיעות ב p_i עם הסתברות חיובית חייבים להיות שווים!

הוכחת המשפט

עבור אסטרטגיה מעורבת p_i מתקיים: ▶

$$u_i(p_i, p_{-i}) =$$

$$= \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

$$\leq \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) \left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i}) \right)$$

$$\leq \left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i}) \right) \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i)$$

$$= \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i}) = u_i(x_k, p_{-i}) \leq u_i(p_i, p_{-i})$$

אם כך יש
כאן שיויון

הוכחת המשפט – המשך

▶ לכן עבור כל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ עבורה $p_i(x_i) > 0$ מתקיים בהכרח

$$u_i(x_i, p_{-i}) = \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})$$

▶ כלומר כל אסטרטגיה עם הסתברות חיובית היא תגובה מיטבית.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- ▶ נניח מראש שאנחנו יודעים/מנחשים שנקודת שיווי המשקל היחידה היא כאשר שתי השחקניות בוחרות באסטרטגיות מעורבות (ממש).
- ▶ לדוגמה: פסלנו מראש את האפשרות שקיים שיווי משקל בו שראפובה בוחרת באסטרטגיה מעורבת וויליאמס בוחרת באסטרטגיה טהורה.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

▶ כעת נחשב את התועלות הטהורות של ויליאמס, כאשר שראפובה בוחרת באסטרטגיה המעורבת q^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_1(L, q^*) = 50q^* + 80(1 - q^*) \\ u_1(R, q^*) = 90q^* + 20(1 - q^*) \end{cases}$$

▶ כעת בא הטריוק: בתגובה המיטבית של ויליאמס, שני הערכים $u_1(L, q^*), u_2(R, q^*)$ חייבים להיות שווים!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

▶ אם כך קיבלנו

$$-30q^* + 80 = 70q^* + 20$$

▶ או

$$q^* = \frac{6}{10}$$

▶ קיבלנו תופעה מעניינת: בעזרת האסטרטגיות של ויליאמס, חישבנו דווקא את אסטרטגית שיווי המשקל של שראפובה!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

▶ כעת נחשב את התועלות הטהורות של שראפובה, כאשר ויליאמס בוחרת באסטרטגיה המעורבת p^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*, \ell) = 50p^* + 10(1 - p^*) \\ u_2(p^*, r) = 20p^* + 80(1 - p^*) \end{cases}$$

▶ נשווה את שתי השורות, ונקבל $p^* = \frac{7}{10}$.

מסקנות משיטת החישוב החדשה

- ▶ שחזרנו את נקודת שיווי משקל נאש ללא חישוב פונקציות התגובה המיטבית.
- ▶ מי מבטיח שזו אכן נקודת שיווי משקל? לפי המשפט חייבת להיות כזו, וראינו שלא ייתכן שהיא מכילה אסטרטגיות טהורות.
- ▶ אם שראפובה אינה בוחרת באסטרטגית שיווי המשקל שלה, אזי בהכרח נקבל שהאסטרטגיה המיטבית של ויליאמס היא אסטרטגיה טהורה. מדוע?
- ▶ תשובה: כיוון ש q^* היא האסטרטגיה היחידה בה התועלות של ויליאמס משתוות, ולכן בבחירת q אחרת, לא ייתכן שאסטרטגיה מעורבת תהיה תגובה מיטבית.

טניס – ויליאמס מכה שנית

▶ בניח כעת שלקראת המשחק הבא של שתי השחקניות, מריה שראפובה מנסה לשפר את מכת ה backhand שלה, ולענות יותר טוב לכדורים שבאים משמאלה:



ℓ r



L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

ניתוח אינטואיטיבי של המשחק

▶ **השפעה ישירה:** כעת שחל שיפור במכת ה backhand, סביר לחשוב ששראפובה תעדיף יותר להתכונן יותר לכיוון שמאל, כלומר נצפה לאסטרטגית שיווי משקל לקיים

$$q^* > \frac{6}{10}$$

▶ **השפעה אסטרטגית:** כיוון שויליאמס יודעת שחל שיפור בחבטות של שראפובה, היא תעדיף לחבוט יותר לימינה של שראפובה. אם כך, עדיף על שראפובה להתכונן לחבטות

$$מצד ימין. לכן נצפה שיתקיים $q^* < \frac{6}{10}$.$$

▶ קיבלנו אם כך שיש כוחות שמושכים את נקודת שיווי המשקל לכיוונים מנוגדים.

חישוב NE במשחק החדש

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80
	ℓ	r

$$\begin{cases} u_1(L, q^*) = 30q^* + 80(1 - q^*) \\ u_1(R, q^*) = 90q^* + 20(1 - q^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*, \ell) = 70p^* + 10(1 - p^*) \\ u_2(p^*, r) = 20p^* + 80(1 - p^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = \frac{7}{12}$$

מסקנות

- ▶ ראינו שלמרות ששראפובה שיפרה את מכת ה backhand שלה, עליה להמנע מנטייה מוגברת להתכוננות לצד שמאל.
- ▶ כלומר ההשפעה האסטרטגית גברה על ההשפעה הישירה.
- ▶ אם כך יש להזהר בקביעת מסקנות לפי אינטואיציה בלבד.

- ▶ **האם ניתן להסתמך על חישוב נק' שיווי המשקל לחיזוי של משחקים אמיתיים?**
- ▶ סיבה אפשרית לכך שחיזוי כזה לא יהיה מדויק היא שבני אדם אינם מכונות טובות לייצור מספרים רנדומליים.
- ▶ קשה לקבוע את הצד אליו שראפובה התכוננה מצפייה.

משפט נאש - תקציר הוכחה (לקריאה עצמית)

משפט נאש: יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

משפט נאש – תקציר הוכחה

- ▶ נתמקד במשחק בו יש לכל שחקן שתי אסטרטגיות טהורות.
- ▶ כפי שראינו במשחק שנוצר ע"י הוספת אסטרטגיות מעורבות האסטרטגיות החדשות של שחקן i היא בחירת אסטרטגיה $p_i \in [0,1]$.
- ▶ תחום ההגדרה של הפונקציות u_i הוא קוביה רב-מימדית, שהיא תחום סגור, חסום וקמור.

למות עזר

▶ למה 1: $BR_i(p_{-i}) \neq \emptyset$.

▶ למה 2: $BR_i(p_{-i})$ היא קבוצה סגורה, קמורה וחסומה.

▶ למה 3: להתאמה $BR_i(p_{-i})$ יש גרף סגור.

התאמת התגובה הטובה ביותר

▶ בהנתן וקטור אסטרטגיות $(p_i)_{i \in I}$ נגדיר

$$BR((p_i)_{i \in I}) = \left\{ (p'_i)_{i \in I} : p'_i \in BR_i(p_{-i}), i \in I \right\}$$

▶ או:

$$BR((p_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} BR_i(p_{-i})$$

▶ למה 4: הקבוצה

$$BR((p_i)_{i \in I})$$

היא קמורה, וסגורה ולא ריקה, ויש להתאמה BR גרף סגור.

תנאי מספיק והכרחי לקיום NE

▶ למה 5: וקטור אסטרטגיות $(p_i^*)_{i \in I}$ הוא נקודת שיווי משקל נאש אם ורק אם קיימת להתאמה BR נקודת שבת, כלומר:

$$(p_i^*)_{i \in I} \in BR((p_i^*)_{i \in I})$$

משפט נקודת השבת של Kakutani

יהי: ▶

◦ Y תחום סגור, חסום וקמור ב \mathbb{R}^n

◦ $f \subseteq Y \times Y$ התאמה כך ש:

• $f(y)$ היא קבוצה קמורה סגורה ולא ריקה לכל $y \in Y$.

• ל f יש גרף סגור.

▶ אזי: ל f יש נקודת שבת, כלומר נקודה $y^* \in Y$ כך ש

$$y^* \in f(y^*)$$

סיום ההוכחה של משפט נאש

- ▶ ההתאמה BR מקיימת את התנאים של משפט Kakutani לפי למות 1-4.
- ▶ לכן קיימת לה נקודת שבת.
- ▶ לכן לפי למה 5 נקבל שקיימת נקודת שיווי משקל נאש.