

הרצאה II - אינפי 1

משפט: לכל a, b ממשיים קיים r רציונלי כך ש $a < r < b$. בהנחה ש $b > a$.

הוכחה: $b - a > 0$ $\varepsilon := b - a$ ולפי עיקרון ארכימדס $\frac{1}{n_0} < \varepsilon = b - a$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$. נגדיר $E := \left\{ m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n_0} < b \right\}$. E חסומה מעיל ולכן

קיים m_0 איבר מקסימלי, $m_0 = \max A$ (לפי משפט). בנוסף: $\frac{m_0+1}{n_0} \geq b$, $m_0 + 1 \notin E$ ומתקיים $b > a > b - \frac{1}{n_0} \geq \frac{m_0}{n_0}$.

ונקבל כי $b - a + b > b - \frac{1}{n_0} > b - a$ ולכן $\frac{1}{n_0} < b - a$ ומכאן נובע כי $a < \frac{m_0}{n_0} < b$. משל.

קו ממשי רחבי: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

$$X + \infty = \infty \quad (I)$$

$$X + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad (II)$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (III)$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \quad (IV)$$

$$(+\infty) + (-\infty) = \text{לא מוגדר} \quad (V)$$

$$X(\pm\infty) = \pm\infty \text{ עבור } x \text{ חיובי} \quad (VI)$$

$$X(\pm\infty) = \mp\infty \text{ עבור } x \text{ שלילי} \quad (VII)$$

$$0\infty \text{ לא מוגדר} \quad (VIII)$$

$$(IX) \text{ לכל } x \text{ ממשי מתקיים: } x < +\infty$$

$$(X) \text{ לכל } x \text{ ממשי מתקיים: } x > -\infty$$

הגדרה:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$\text{הגדרה: ערך מוחלט: } |x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}. \text{ תכונות: } |x| \geq 0, |xy| = |x| \cdot |y|$$

משפט: אי שוויון משולש: $|x + y| \leq |x| + |y|$. לכל x, y ממשיים.

הוכחה: לכל x ממשי מתקיים: $-|x| \leq x \leq |x|$ ונקבל $-x \leq |x|$. כעת נפצל לשני מקרים:

$$1. \quad x + y \geq 0, \quad |x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

$$2. \quad x + y \leq 0, \quad |x + y| = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$$

משל.

משפט: אי שוויון משולש מוכלל: לכל x, y ממשיים מתקיים: $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. לכל x, y ממשיים.

הוכחה:

$$1. \quad |x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$$

$$2. \quad |y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$$

$$3. \quad |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$4. \quad |x| - |y| \geq -|x - y|$$

ומכאן: $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$. ומכאן נובע $||x| - |y|| \leq |x - y|$. והטענה הוכחה. משל.

חסם עליון ותחתון:

הגדרה: A מוכלת ממש ברציונליים.

$$\bullet \quad \Gamma_+(A) = \{c \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x \leq c\} \text{ קבוצת כל החסמי מעיל.}$$

• $\Gamma_-(A) = \{c \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \geq c\}$ קבוצת כל החסמי מלרע.

הגדרה: A חסומה מלעיל אם $\Gamma_+(A) \neq \emptyset$, A חסומה מלרע אם $\Gamma_-(A) \neq \emptyset$. A חסומה וגם A חסומה מלרע.

טענה: A חסומה אי"א קיים c חיובי כך ש $\forall x \in A : |x| < c$.

משפט: תהי A קבוצה לא ריקה מוכלת בממשיים. 1. A חסומה מלעיל, אזי יש ב $\Gamma_+(A)$ איבר מינימאלי.

2. A חסומה מלרע, אזי יש ב $\Gamma_-(A)$ איבר מקסימלי.

הוכחה: $a \leq b : \forall a \in A, b \in \Gamma_+(A)$. ולפי אקסיומת דדיקנד קיים c ש $A \leq c \leq \Gamma_+(A)$.

קודם כל, $A \leq c$ לכן $\forall a \in A : a \leq c$ וע"פ הגדרה $c \in \Gamma_+(A)$. ובנוסף ידוע כי $c \leq b \forall b \in \Gamma_+(A)$. וע"פ הגדרה נקבל כי

$$c = \min(\Gamma_+(A))$$

הגדרה: A לא ריקה חסומה מלעיל אז $\sup A = \min(\Gamma_+(A))$. חסם עליון

A לא ריקה חסומה מלרע אז $\inf A = \max(\Gamma_-(A))$. חסם תחתון

הגדרה: A לא ריקה לא חסומה מלעיל אז $\sup A = +\infty$.

A לא ריקה חסומה מלרע אז $\inf A = -\infty$.

משפט: קריטריון לאינפימום וסופרימום.

A קבוצה לא ריקה ומוכלת ממש בממשיים.

המספר $q \in \mathbb{R}$ חסם עליון של A ($\sup A$) אם ורק אם:

$$1. \forall x \in A : x \leq q$$

$$2. \forall q' < q \exists x \in A : q' < x \leq q$$

המספר $p \in \mathbb{R}$ חסם תחתון של A ($\inf A$) אם ורק אם:

$$3. \forall x \in A : x \geq p$$

$$4. \forall p' > p \exists x \in A : p' > x \geq p$$

עבור $q = \sup A$, $q \in \mathbb{R}$ אם ורק אם:

$$1. \forall x \in A : x \leq q$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : q - \varepsilon < x \leq q$$

עבור $p = \inf A$, $p \in \mathbb{R}$ אם ורק אם:

$$1. \forall x \in A : x \geq p$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : p + \varepsilon > x \geq p$$

פרק שני: תורת הסדרות

הגדרה של סדרה: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $f(n) = a_n$.

הגדרה: תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אומרים שמספר L ממשי הוא גבול הסדרה אם מתקיים:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : |x_n - L| < \varepsilon$$