קבוצות פתוחות/סגורות דרך פונקציות רציפות

תרגיל

תהי $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|xy<1\right\}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$. הוכיחו שD פתוחה.

פתרון

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x,y)=xy$.
f רציפה כמכפלת הטלות(שהן רציפות).

$$D=\{(x,y)|f(x,y)<1\}=\{(x,y)|f(x,y)\in(-\infty,1)\}=f^{-1}(-\infty,1)$$

f^{-1} רציפה, $(-\infty,1)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$ - לכן D פתוחה.

תרגיל

הוכיחו שפונקציית הערך השלם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=[x]$ אינה רציפה.

פתרון

$\{s\}$ סגור ב$\mathbb{R}$(כל נקודון סגור במ"מ).

$$f^{-1}(\{5\})=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in\{5\}\}=\{x\in\mathbb{R}|[x]=5\}=[5,6)$$

אבל $[5,6)$ לא סגורה ב$\mathbb{R}$, ולכן f לא רציפה.

תרגיל

יהי (X,d) מ"מ ו$a\in X$.

1. הוכיחו כי הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה.
2. הסיקו שלכל $r>0$, $B[a,r]$ סגורה.

פתרון

1. תהי $x\in X$. נראה שf_a רציפה בx.
יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\epsilon$. אזי אם $d(x,y)<\delta$ נקבל ש

$$|f_a(x)-f_a(y)|=|d(x,y)-d(y,a)|\le d(x,y)<\delta=\epsilon$$

2.

$$B[a,r]=\{x\in X|d(x,a)\le r\}=\{x\in X|f_a(x)\le r\}=\{x\in X|f_a(x)\in[0,r]\}=f_a^{-1}([0,r])$$

$\Leftarrow$ $B[a,r]$ סגורה

תרגיל

יהי M מ"מ, $A \subseteq M$ סגורה. הוכיחו שאם $x \notin A$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A = \emptyset$

פתרון

$\underset{\text{closed}}{A} \Leftarrow x \notin \underset{\text{open}}{A^c} \Leftarrow x \in$ קיים $\epsilon > 0$ כך ש-$B(x,\epsilon) \subseteq A^c$

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < \epsilon$ ולכן $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq A^c \Leftarrow B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A = \emptyset$

תרגיל

הוכיחו שבמ"מ כל קבוצה סגורה ניתנת להצגה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות.

הוכחה

תהי A סגורה. לכל $n \in \mathbb{N}$

$$O_n := \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{1}{n}\right)$$

O_n פתוחה לכל n כאיחוד של פתוחות. נראה ש-$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = A$

$\supseteq$ $A \subseteq O_n$ לכל n שכן אם $a \in A$ אזי $a \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)^{\subseteq O_n}$. מכאן $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

$\subseteq$ נניח בשלילה שקיים $x \in \bigcap O_n$ וגם $x \notin \underset{\text{closed}}{A}$. מהתרגיל הקודם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$B\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \cap A = \emptyset$. $x \in \bigcap O_n$ בפרט $x \in O_{n_0}$. לכן $x \in \bigcup_{a \in A} B\left(u, \frac{1}{n_0}\right)$. לכן קיים $a \in A$ כך ש-$x \in B\left(a, \frac{1}{n_0}\right)$. מכאן $a \in B\left(x, \frac{1}{n_0}\right)$ וגם $a \in A$ לכן $a \in B\left(x, \frac{1}{n_0}\right)$ בסתירה לכך שהחיתוך הנ"ל ריק.

נקודות הצטברות במ"מ

הגדרה

1. יהי (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$. נאמר ש-$a \in X$ היא נקודת הצטברות של A אם לכל $\epsilon > 0$ $(B(a,\epsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

הגדרה שקולה (משפט)

2. a נקודת הצטברות של A $\Leftrightarrow$ קיימת סדרה $a \leftarrow \{x_n\} \subseteq A\setminus\{a\}$

הגדרה שקולה נוספת

3. a נקודת הצטברות של A $\Leftrightarrow$ קיימת $a \leftarrow \{x_n\} \subseteq A$ שכל איבריה <u>שונים</u>.

הערה: נקודת הצטברות של A לא חייבת להיות שייכת לA.

סימון: נסמן את אוסף נק' ההצטברות של A בA'.

תרגיל

הוכיחו שA סגורה אס"ם $A' \subseteq A$.

פתרון

$\Leftarrow$ תהי $x \in A$, אזי קיימת סדרה $A \supseteq \{x\} - A \supseteq \{x_n\} \leftarrow x$. A סגורה ולכן מכילה את כל נקודות הגבול שלה, בפרט $x \in A$. לכן $A' \subseteq A$.

$\Rightarrow$ נתון $A' \subseteq A$. נרצה להראות שA מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $x \leftarrow \{x_n\} \subseteq A$. נראה ש$x \in A$.
נניח בשלילה $x \notin A$. $x \leftarrow \{x_n\} \subseteq A = A - \{x\}$, לכן x נקודת הצטברות של A. כלומר $x \in A'$. $x \in A \Leftarrow A' \subseteq A$. סתירה. לכן A סגורה.

תרגיל

יהי (M,d) מ"מ, $A \subseteq M$. אזי $(A')' = A'' \subseteq A'$.

מסקנה מהתרגיל: A' סגורה לכל A(לפי התרגיל הקודם)

הוכחה

יהי $a \in A''$. אזי לכל $r > 0$ מתקיים

$$\left(B\left(a,\gamma\right)\setminus\{a\}\right)\cap A' \neq \emptyset$$

נרצה להוכיח $a \in A'$, כלומר שלכל $r > 0$

$$\left(B\left(a,r\right)\setminus\{a\}\right)\cap A \neq \emptyset$$

יהי $r > 0$.

$$\exists b \in \left(B\left(a,r\right)\setminus\{a\}\right)\cap A' \neq \emptyset$$

$$\epsilon = \min\left\{d\left(a,b\right), r - d\left(a,b\right)\right\}$$

$b \in A'$ כלומר b נקודת הצטברות של A ולכן לכל $t > 0$ וברפט עבור $t = \epsilon$ מתקיים

$$\boxed{\exists c \in \left(B\left(b,\epsilon\right)\setminus\{b\}\right)\cap A \neq \emptyset}$$

נראה ש$c \in (B(a,r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

$$d(c,b) < \epsilon \leq d(a,b) \Rightarrow c \neq a$$

$$d(c,b) < \epsilon \leq r - d(a,b)$$

$$\Downarrow$$

$$d(a,c) \leq d(c,b) + d(a,b) < \gamma$$

לכן $c \in B(a,r)$ ובסה"כ c בחיתוך הנ"ל.

קומפקטיות במרחב מטרי

הגדרה

כיסוי פתוח/תת כיסוי

1. יהי M מ"מ. אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ יקרא כיסוי פתוח של M אם $U_{\alpha\in I} = M$
2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי של M ו$J \subseteq I$ תת קבוצה של אינדקסים כך ש$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ בעצמו כיסוי לM, אזי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ יקרא תת כיסוי.

הגדרה

מ"מ M נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.

תרגיל

במ"מ דיסקרטי כל נקודון הוא קבוצה פתוחה.

פתרון

לכל x,

$$B(x,1) = \{y | d(x,y) < 1\} = \{x\}$$

כל כדור פתוח במ"מ הוא קבוצה פתוחה ולכן $\{x\}$ פתוחה.

הערה

$A = \bigcup_{x\in A} \{x\}$ לכן במ"מ דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה.

תרגיל

מ"מ דיסקרטי הוא קומפקטי אם ורק אם הוא סופי

פתרון

$\Leftarrow$ $\bigcup\limits_{x\in X}\{x\}=X$ זהו כיסוי פתוח במ"מ דיסקרטי. לפי התרגיל הקודם, X קומפקטי ולכן קיים תת כיסוי סופי. לכן קיים תת כיסוי סופי, כלומר $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{x_i\}$ כאשר $X\subseteq\{x_1,\dots x_n\}$

$\Rightarrow$ תרגיל

תרגיל

הראו ש$(0,1]$ אינו קומפקטי.

פתרון

מתקיים $\left(\frac{1}{n},1\right]\bigcup\limits_{1\leq n\in\mathbb{N}}=(0,1]$ וזהו כיסוי פתוח(הקבוצות פתוחות ב$(0,1]$, לא ב$\mathbb{R}$) שלא קיים לו תת כיסוי סופי.

נניח בשלילה שקיים כיסוי סופי, כלומר קיים $k>0\in\mathbb{N}$ ו$n_1,\dots n_k$ כך ש

$$(0,1]\bigcup_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i},1\right]=\left(\frac{1}{n_k},1\right]$$

מתקיים $\frac{1}{2nk}\in(0,1]$ - וזה לא נמצא באיחוד הנ"ל.