מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2016-01-03

מבוא לתורת המשחקים
89-617-01

מכירות פומביות/מכרזים - Auctions

השאלה כמה כדאי להציע תלויה בחוקי המכירה, לדוגמה:

- English Auction - מי שמציע את המחיר הכי גבוה משלם אותו
- Second Price - מי שמציע את המחיר הכי גבוה משלם את המחיר השני הכי גבוה
- מכרז הכל משלמים - כל קונה משלם את המחיר שהציע, בין אם זכה ובין אם לא.

לדוגמה:
- במרוץ חימוש בין מדינות, המדינה שהגיעה לחימוש הכי גבוה היא הזוכה, אבל כל המדינות משלמות על ההשקעה בחימוש
- פטנט - רק מי שמצליח להוציא את הפטנט מרוויח, אבל כולם משקיעים בפיתוח
- תחרות של טכנולוגיה - כולם משקיעים זמן אבל רק אחד זוכה

מכרז אנגלי

המכרז הפשוט ביותר:

- המחירים תמיד עולים:
  - או שהמציעים מכריזים על מחירים עולים
  - או שהauctioner מכריז על מחירים עולים
- המציע עם ההצעה הגבוהה ביותר זוכה
- הזוכה ישלם מעט יותר מהbid השני הכי גבוה - כי כל אחד יעלה בקצת, ולאט לאט יפרשו אנשים עד שישארו זה ששווה לו הכי הרבה וזה ששווה לו מקום שני הכי הרבה - ואז הראשון יעלה בקצת מעל המחיר של השני והשני יוותר

מבחינה רציונלית, עדיף להציע קצת יותר מההצעה הנוכחית - אבל יש אנשים שמקפיצים את ההצעה בשביל האפקט הפסיכולוגי.
(אם יש לחץ זמן, לפעמים עדיף להקפיץ)

אסטרטגיות

האם כדעי להציע כבר בהתחלה? אם יש קפיצות קבועות אז אולי כן, אבל בד"כ עדיף להמתין לסוף המכירה.
מה קורה אם כולם מציעים בסוף? המכירה מתחדשת למספר דקות ברגע שיש הצעה חדשה, כדי לתת לאנשים אחרים הזדמנות להציע.

Sealed Bid

המציעים מעבירים את ההצעה בחשאי, בלי שהמציעים האחרים יראו מה היא. יש כל מיני אפשרויות כמה הוא ישלם - את ההצעה שלו? את הbid השני הכי גבוה? מה שחשוב זה שכל אחד יודע רק את ההצעה של עצמו, ויכול רק להעריך את הערך של הפריט עבור האחרים.

מכרז הולנדי

מתחילים עם מחיר מאוד גבוה, ומורידים את המחיר בקפיצות קבועות. הראשון שמצביע "עוצר את המחיר", זוכה, ומשלם את המחיר.
המכרז הזה מנסה להשיג תוצאה של first price, בניגוד למכרז האנגלי שמביא לsecond price.

מכרז כפול Double Auction

כמו בורסה - גם הקונים וגם המוכרים נותנים bidים.

מכרז הפוך Reverse Auction

קונה יחיד, הרבה מוכרים מציעים הצעות

Multiunit Auction

למוכר יש מספר פריטים זהים שהוא יכול למכור לקונים שונים במחירים שונים

The Vickery Second Price Auction

זהו Sealed Bid שבו הזוכה משלם את המחיר של ההצעה השנייה הכי טובה.
במכרז הזה, האסטרטגיה השולטת היא להציע את השווי האמיתי מבחינת כל מציע!

- אם נציע יותר ממה ששווה לנו הפריט, יכולים להיות 3 מצבים:
  - הצענו יותר, אבל לא זכינו. במצב הזה לא השתנה כלום מזה שהצענו יותר - כי גם קודם לא היינו זוכים
  - העלנו את המחיר, אבל מראש היינו זוכים. בגלל שבכל מקרה משלמים את ההצעה של השני, אז גם כאן אין הבדל בגלל זה שהצענו יותר
  - העלנו את המחיר ובזכות זה זכינו. זה אומר שהbid שעקפנו הציע יותר מהשווי של המוצר עבורנו, ויוצא ש**הפסדנו** כי אנחנו משלמים על המכרז יותר מהשווי שלו עבורנו

  לכן - לעולם לא נרצה להציע יותר מכמה ששווה לנו הפריט
- אם נציע פחות ממה ששווה לנו הפריט, יכולים להיות 3 מצבים:
  - לא היינו אמורים לזכות מלכתחילה. כשנוריד את ההצעה עדיין לא נזכה - ולכן אין הבדל בין המקרים
  - זכינו אבל היינו אמורים לזכות מלכתחילה. מכיוון שבכל מקרה משלמים את המחיר השני - גם כאן אין הבדל בין המקרים
  - הורדנו את המחיר ובגלל זה הפסדנו. זה אומר שהפסדנו את הפריט, ולכן **הפסדנו**

  לכן - לעולם לא נרצה להציע פחות מכמה ששווה לנו הפריט

נשים לב שהאסטרטגיה הזו לא תלויה במה שהאחרים עושים - בכל מקרה היא אסטרטגיה שולטת

- בחיים האמיתיים זה לא עובד, כי אנשים לא מבינים את זה. אבל בגופים גדולים זה בדרך כלל כן עובד, כי שם כן יש אנשים שמבינים את זה.
- הרווח של הזוכה נקרא surplus, והוא יורד ככל שיש יותר מציעים

רמאות על ידי שיתוף פעולה

אם הראשון משכנע את השני להוריד את ההצעה שלו, הוא ישלם את ההצעה של השלישי, וברווח הזה(בין השני והשלישי) הראשון והשני יכולים להתחלק

נחזור למכירות First Price - עדיין בSealed Bid

כאן יש tradeoff:

- אם ניתן bid גבוה בטוח נפסיד
- אם ניתן bid בגובה הערך, אז לבטח לא יהיה surplus
- אם ניתן הצעה משמעותית יותר נמוכה, אז אמנם אם נזכה הsurplus יהיה גבוה - אבל הסיכוי לזכייה ילך וירד

ניתוח שיווי משקל First-price sealed-bid auction באמצעות BNE (Bayesian Nash Equilibrium)

מכיוון שהשחקנים לא יודעים את השווי של הפריט עבור שחקנים אחרים, אי אפשר למצוא שיווי משקל נאש - אבל אם יודעים פונקציית התפלגות של השווי עבור שחקנים אחרים אז כן אפשר למצוא BNE, שהוא הרחבה של שיווי משקל נאש עבור תוחלות.

הגדרה: האסטרטגיות $s_1, \dots s_n$ הן BNE אם לכל i, v_i, a:

$$E_{v-i}\left[u_i\left(s_i\left(v_i\right)\right), s_{-i}\left(v_{-i}\right)\right] \geq E_{v-i}\left[u_i\left(a_i, s_{-i}\left(v_{-i}\right)\right)\right]$$

אם לכל שחקן הערך נבחר בהתפלגות אחידה $v_i \in [0,1]$, אז שווה לכל שחקן i להציע $b = \frac{v_i(N-1)}{N}$. אם כולם יציעו ככה, הסיכוי של b לזכות הוא $\left(\frac{b \cdot N}{N-1}\right)^{N-1}$. הרווח הוא $v_i - b$, ולכן תוחלת הרווח היא $(v_i - b) \cdot \left(\frac{b \cdot N}{N-1}\right)^{N-1}$.

הרווח לauctioner בfirst-price מול second-price

- בfirst-price הסיכוי שלא תהיה הצעה גדולה מb הוא $F(b) = \left(\frac{b \cdot N}{N-1}\right)^N$. זה CDF (Cumulative Distribution Function) של הbid הכי גבוה, ואם נגזור אותה נקבל את הprobability distribution function - $f(b) = N \cdot b^{N-1} \cdot \left(\frac{N}{N-1}\right)^n$. לכן התוחלת של הbid הכי גבוה היא $\int_0^1 b \cdot f(b)\, \mathrm{d}b$:

$$N \cdot \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \int^{\frac{N-1}{N}} b^n \, \mathrm{d}b = \frac{N-1}{N+1}$$

- בsecond-price הסיכוי שלא יהיו שני bidים גדולים מb הוא $F(b) = b^n + nb^{n-1}(1-b)$. שוב - נגזור ונקבל

$$f(b) = N \cdot b^{N-1} + N \cdot (N-1) \cdot b^{N-2} \cdot (1-b) - N \cdot b^{N-1} = N(N-1)\left(b^{N-2} - b^{N-1}\right)$$

ותוחלת הbid היא:

$$\int_0^1 b \cdot f(b)\, \mathrm{d}x = \cdots = \frac{N-1}{N+1}$$

Revenue Equivalence Theorem

אם השווי של פריט מתפלגים התפלגות רציפה על פני $[L, H]$ (בלי gapים), והסוכנים הם risk-neutral, אז לכל שני מנגנוני מכרזי sealed bid בהם הbidder הגבוה ביותר זוכה, תוחלת הרווח לauctioneer היא אותו דבר.