# מערך תרגול 5 מופשטת 3

**תזכורת 5.1** פולינום $f(x)$ נקרא ספרבילי, אם כל השורשים שלו בשדה הפיצול הם בריבוי 1 (גורמים לינאריים שונים).

דרך אפקטיבית לזהות פולינום ספרבילי היא ע"י הקריטריון: $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם

$$\gcd(f(x), f'(x)) = 1$$

**תרגיל 5.2** האם הפולינום

$$x^4 - 8x + 16$$

ספרבילי?

**פתרון:** הנגזרת היא

$$4x^3 - 8$$

אז צריך לבדוק את שני אלה זרים. נשתמש באלגוריתם אוקלידס אפשר כמובן לחלק ב 4 ולקחת $x^3 - 2$.

$$x^4 - 8x + 16 = x(x^3 - 2) - 6x + 16$$

נחלק ב $-6$ וניקח את $x - \frac{8}{3}$.

$$(x^3 - 2) = (x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{64}{9})(x - \frac{8}{3}) + \frac{512}{27}$$

ולכן הפולינום זרים, כלומר הפולינום

$$x^4 - 8x + 16$$

ספרבילי.

**תרגיל 5.3** האם הפולינום

$$x^4 - 8x^2 + 16$$

ספרבילי?

**פתרון:** קל לפתור ע"י חישוב השורשים ישירות. אבל נשתמש בנגזרות במקום. הנגזרת היא

$$4x^3 - 16x$$

נשתמש באלגוריתם אוקלידס עם $x^3 - 4x$. ונקבל

$$x^4 - 8x^2 + 16 = x(x^3 - 4x) - 4x^2 + 16$$

ו

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

כלומר הפולינום ונגזרתו לא זרים (יש גורם משותף $x^2 - 4$) ולכן $x^2 - 4x^2 + 16$ לא ספרבילי.

**תרגיל 5.4** יהיו $f,g:F(a_1,\ldots,a_n)\to K$ שני הומומורפיזמים שמקיימים

$$f(x)=g(x)\quad \forall x\in F$$

$$f(a_i)=g(a_i)\quad 1\le i\le n$$

הראו כי $f=g$.

**פתרון:** הקבוצה

$$\{x\in F(a_1,\ldots,a_n)\mid f(x)=g(x)\}$$

היא תת שדה של $F(a_1,\ldots,a_n)$ (קל לבדוק) והיא מכילה את $F,a_1,\ldots,a_n$.

**תרגיל 5.5** תהי הרחבת שדות $F\subseteq K$. יהי$g(x)\in F[x]$ אי פריק ויהיו $a,b$ שני שורשים של $g$. הוכיחו כי יש איזומורפיזם

$$f:F(a)\to F(b)$$

המקיים כי $f(a)=b$ וכן $f(x)=x$ לכל $x\in F$.

**פתרון:** נסתכל על העתקת ההכלה

$$i:F\to F(b)$$

לפי תכונה של פולינומים אפשר להרחיב אותה להעתקה

$$f:F[x]\to F(a)$$

כך ש $f(x)=b$. כמובן שכעת זוהי העתקה על. נשים לב שהגרעין הוא $\langle g(x)\rangle$ (כי $g(x)$ פולינום מינימלי של $a$). לפי משפטי האיזומורפיזם יש איזומורפיזם

$$f:F[x]/\langle g(x)\rangle\to F(a)$$

באופן דומה ניתן לבנות איזומורפיזם

$$g:F[x]/\langle g(x)\rangle\to F(b)$$

ההעתקה שאנחנו מחפשים היא

$$gf^{-1}$$

**תזכורת 5.6** תהי $F\subseteq K$ הרחבת שדות ויהיו $a,b\in K$ איברים עם פולינומים מינימליים $m_a,m_b$ מעל $F$. נסמן ב $E_a,E_b$ את שדות הפיצול של $m_a,m_b$. אזי כל איזומורפיזם

$$f:F(a)\to F(b)$$

שמקבע את איברי $F$ (כלומר $f(x)=x\quad \forall x\in F$) ניתן להרחיב לאיזומורפיזם

$$f:E_a\to E_b$$

**תרגיל 5.7** יהי $g(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול $E$. ויהיו $a, b$ שני שורשים של $g(x)$. הוכיחו כי יש איזומורפיזם $f : E \to E$ שמקבע את איברי $F$ ומקיים $f(a) = b$

**פתרון:** לפי תרגיל קודם יש איזומורפיזם $f : F(a) \to F(b)$ שמקבע את איברי $F$ ושולח $f(a) = b$ לפי התזכורת אפשר להרחיב אותו לכל $E$.

**הגדרה 5.8** נניח $F, L \subseteq K$. קיים תת שדה של $K$ שהוא התת שדה הקטן ביותר המכיל את $F, L$ והוא מסומן בדר"כ $FL$ או $F \vee L$.

**תרגיל 5.9** יהיו $F \subseteq B \subseteq E$ שדות כך ש $E$ שדה פיצול של פולינום $f(x) \in E[x]$ כלשהוא ו$B$ מכיל שורש $a$ כלשהוא של $f(x)$. הוכיחו כי ניתן למצוא $B_1, \ldots, B_k$ תתי שדות של $E$ שכולם איזומורפיים ל $B$ כך ש

$$E = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$$

**פתרון:** נסמן ב $b_1, \ldots, b_k$ את שורשי $F$. ראינו כבר שיש איזומורפיזמים

$$f_i : F(a) \to F(b_i)$$

ואפשר להרחיב אותם

$$f_i : E \to E$$

נסמן ב $B_i$ את $f_i(B)$. אז כמובן

$$B_i \cong B$$

לכל $i$ מתקיים ש $B_i \subseteq E$ ולכן

$$B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k \subseteq E$$

מצד שני כל השורשים של $F$ שייכים ל $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$ ולכן

$$E \subseteq B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$$

וקיבלנו שוויון כנדרש.