מבנים אלגבריים תרגול 2

16 במרץ 2021

1 תת חבורה

הגדרה: תהי G חבורה ותהי $H \subseteq G$ תת־קבוצה של G. נאמר שH תת חבורה אם היא מקיימת את כל תנאי חבורה. בפועל, כיון שהיא תת קבוצה של חבורה מה שצריך לבדוק זה:

1. איבר היחידה: $e_G \in H$.
2. סגירות: $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2 \in H$.
3. הופכי: $\forall h \in H : h^{-1} \in H$.

סימון: נסמן ת"ח ע"י $H \leq G$.

תרגילים:

1. תהי G חבורה, $H \subseteq G$. הוכיחו: $H \leq G$ אמ"ם מתקיים:
   (א) איבר היחידה: $e_G \in H$.
   (ב) $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2^{-1} \in H$.

   פתרון: בכיוון הראשון, נניח H ת"ח, לכן איבר היחידה שם. כעת יהיו $h_1, h_2 \in H$, אזי מתנאי 3 של ת"ח נקבל $h_2^{-1} \in H$, ואז מתנאי הסגירות של ת"ח נקבל $h_1 h_2^{-1} \in H$.

   בכיוון השני, נניח ששני התנאים מתקיימים ונראה ש־H ת"ח. תנאי 1 מתקיים כי זה התנאי הראשון. נוכיח הופכי: יהי $h \in H$, נסמן $h_1 = e, h_2 = h$, ואז לפי התנאי השני נקבל $h^{-1} = eh^{-1} \in H$. כעת לסגירות: יהיו $h_1, h_2 \in H$, אנחנו כבר יודעים ש־ $h_2^{-1} \in H$, ואז מהתנאי השני על h_1, h_2^{-1} נקבל $h_1 h_2 = h_1 \left(h_2^{-1}\right)^{-1} \in H$.

2. האם $\{0, 2\} \subseteq \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, כאשר הפעולה ב־ $\mathbb{Z}_4$ היא חיבור מודולו 4: מחברים ואז לוקחים את השארית בחלוקה ל־4 (כנ"ל לכל n).

   פתרון: איבר היחידה של $\mathbb{Z}_4$ הוא 0, ולכן התנאי הראשון מתקיים. לגבי סגירות

והופכי, יש לבדוק קיום הופכי של 2, וכן סגירות של 2 עם עצמו. נשים לב ש־ $2+2\equiv 0 (\mod 4)$, ולכן הוא ההופכי של עצמו ויש סגירות. בסה"כ זו ת"ח.

3. האם $\{0,3\}\subset\mathbb{Z}_5$ ת"ח?
פתרון: לא, כי $3+3\equiv 1 (\mod 5)\notin\{0,3\}$, כלומר אין סגירות ולכן לא ת"ח.

4. נתבונן ב־ $(\mathbb{Q},+)$ שהיא חבורה. נסמן ב־ $\mathbb{Q}^\times=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. מתקיים: $(\mathbb{Q}^\times,\cdot)$ היא חבורה. האם היא ת"ח של $(\mathbb{Q},+)$?
לא ניתן לדבר על תת חבורה כאשר הפעולה שונה.

5. נסתכל על S_3 ונבדוק שם תתי חבורות. דרך הצגה של תמורות:

$$Id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

הרכבה צורה הזו, למשל עבור $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, אז:

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

למשל

$$f\circ g(3)=f(g(3))=f(1)=1$$

(א) האם $H=\left\{Id,f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ח?
נרכיב את התמורה על עצמה ונראה מה קורה:

$$f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\notin H$$

ולכן לא תת חבורה.

(ב) האם $H=\left\{Id,f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$ ת"ח?
נרכיב את f על עצמה ונראה מה קורה:

$$f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}=Id$$

ולכן זו ת"ח (כי f הופכי של עצמו וסגור עם עצמו).

6. נראה דוגמא לתת חבורה של S_4:

$$H=\left\{Id, f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

צריך לבדוק כאן הרבה דברים: נתחיל מהופכי: נשים לב שכל תמורה כאן מורכבת משני חילופים על זוג מספרים זרים, ולכן הרכבה שלה עם עצמה תתן את הזהות. למשל:

$$g\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}=Id$$

לכן לכל איבר יש הופכי בH. לגבי סגירות, נעיר שמתקיים שהרכבת שניים נותנת את השלישי, לדוגמא:

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}=h$$

ובסה"כ קיבלנו ת"ח.