פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 10

1.

א. סליקה

ב. קוטב מסדר 3.

2. ע"י לקיחת הגבול $n\to\infty$ מקבלים $f(0)=0$ כלומר $f(z)=z\varphi_1(z)$ עבור φ_1 אנליטית. אם נציב זאת שוב בנתון נקבל $\frac{1}{n}\left|\varphi_1\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{1}{n^n}$ או $\left|\varphi_1\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{1}{n^{n-1}}$. גם כאן ניקח את הגבול ונקבל $\varphi_1(0)=0$. כלומר, ניתן לרשום $\varphi_1(z)=z\varphi_2(z)$. אם ממשיכים באינדוקציה, מקבלים שלכל n $f(z)=z^n\varphi_n(z)$ עבור פונקציה אנליטית כלשהי φ_n. מקבלים שכל הנגזרות $f^{(n)}(0)$ מתאפסות. ומכאן שטור הטיילור של f הוא אפס זהותית. $f(z)\equiv 0$.

3. נניח שקיימת. אזי לכל z במעגל היחידה מתקיים $f(z)=0$. מכאן שהפונקציות השלמות $f(z),0$ מתלכדות על רצף של נקודות. ע"פ משפט היחידות $f(z)\equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$. אבל כך לא מתקיים הנתון $|f(z)|=|1-|z||$, בסתירה.

4. הפונקציות השלמות $f''+f,0$ מתלכדות על סדרת הנקודות המתכנסת $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$. ע"פ משפט היחידות הן מתלכדות בכל $\mathbb{C}$. כלומר $f''(z)+f(z)\equiv 0$. אבל זו מד"ר פשוטה שפתרונה $f(z)=c_1e^{iz}+c_2e^{-iz}$. מי שמעדיף, יכול לקחת $f(z)=C_1\cos z+C_2\sin z$.

5. נשתמש במשפט השאריות.

א. πi

ב. $2\pi i$

ג. $-\frac{665\pi i}{32}$

ד. $2\pi i\left[1-(\pi+1)-1+\pi\right]=-2\pi i$