תרגיל 1 אינפי 3 – פתרון

תרגיל 1. יהיו X,Y מרחבים נורמיים עם הנורמות $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ בהתאמה. מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X\times Y$. נמקו. החיבור והכפל בסקרל מוגדרים על $X\times Y$ איבר-איבר.

1. $\|(x,y)\|_a = \|x\|_X + \|y\|_Y$.
2. $\|(x,y)\|_b = \|x\|_X \|y\|_Y$.
3. $\|(x,y)\|_c = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$.

פתרון:

נבדוק האם התכונות מתקיימות.

(א) הפונקציה השנייה אינה נורמה, מכיוון שאי־שליליות אינה מתקיימת; איבר האפס במרחב $X\times Y$ הוא $(0_X, 0_Y)$ ולכן איבר מהצורה $(x, 0_Y)$ כאשר $x \neq 0_X$ אינו איבר האפס, אך מקיים:

$$\|(x,0_Y)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|0_Y\|_Y = \|x\|_X \cdot 0 = 0$$

אפשר לדייק יותר; רק כאשר שני המרחבים הם טריוויאליים, $X=Y=\{0\}$, זוהי אכן נורמה.

(ב) הפונקציות הראשונה והשלישית הן אכן נורמות; נראה זאת.

i. אי־שליליות: מכיוון שלכל $(x,y)\in X\times Y$, $\|x\|_X, \|y\|_Y \geq 0$, נקבל:

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0, \|(x,y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \geq 0$$

כעת,

$$(x,y)=(0,0) \Longrightarrow \|x\|_X, \|y\|_Y = 0 \Longrightarrow \|(x,y)\|_3, \|(x,y)\|_1 = 0$$

לצד שני, אם $(x,y)\neq(0,0)$ אז בה"כ $x\neq 0$ ואז $\|x\|_X>0$ ולכן גם:

$$\|(x,y)\|_3\,,\|(x,y)\|_1>0$$

וסה"כ אי־שליליות מתקיימת עבור שתי הנורמות.

ii. הומוגניות:

$$\|\lambda\,(x,y)\|_1=\|(\lambda x,\lambda y)\|_1=\|\lambda x\|_X+\|\lambda y\|_Y=|\lambda|\cdot\|x\|_X+|\lambda|\cdot\|y\|_Y=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_1$$

כמו כן:

$$\|\lambda\,(x,y)\|_3=\|(\lambda x,\lambda y)\|_3=\max\left\{\|\lambda x\|_X\,,\|\lambda y\|_Y\right\}=\max\left\{|\lambda|\cdot\|x\|_X\,,|\lambda|\cdot\|y\|_Y\right\}=|\lambda|\cdot\|(x,y)\|_3$$

ולכן הומוגניות מתקיימת.

iii. א"ש המשולש:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_1=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_1=\|x_1+x_2\|_X+\|y_1+y_2\|_Y\leq$$

$$\leq\|x_1\|_X+\|x_2\|_X+\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y=\|(x_1,y_1)\|_1+\|(x_2,y_2)\|_1$$

וכן:

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_3=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_3=\max\left\{\|x_1+x_2\|_X\,,\|y_1+y_2\|_Y\right\}\leq$$

$$\leq\max\left\{\|x_1\|_X\,,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X\,,\|y_2\|_Y\right\}=\|(x_1,y_1)\|_3+\|(x_2,y_2)\|_3$$

אי־השוויון נובע מכך ש:

$$\|x_1+x_2\|_X\leq\|x_1\|_X+\|x_2\|_X\leq\max\left\{\|x_1\|_X\,,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X\,,\|y_2\|_Y\right\}$$

וגם:

$$\|y_1+y_2\|_Y\leq\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y\leq\max\left\{\|x_1\|_X\,,\|y_1\|_Y\right\}+\max\left\{\|x_2\|_X\,,\|y_2\|_Y\right\}$$

ואם כן הוכחנו את שלוש התכונות הנדרשות עבור כל אחת מהפונקציות.

תרגיל 2. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ עם הממ"פ $\langle\cdot\rangle$ והנורמה המושרית $\|\cdot\|$.

1. הראו כי מתקיימת הזהות $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$.
2. יהי V מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$ שבו מתקיים שוויון המקבילית

$2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)=\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$.

הראו שהפונקציה

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$$

היא מכפלה פנימית על V והיא משרה את $\|\cdot\|$, ז"א שמתקיים השווין

$$\langle v,v\rangle=\|v\|^2\ .$$

הדרכה: תחילה הראו את השוויון המבוקש. לאחר מכן, יש להראות שתכונת של מכפלה פנימית מתקיימות. החלק הקשה הוא להראות לינאריות ברכיב הראשון. על מנת לעשות את זה, יש תחילה להראות אדיטיביות. לאחר מכן, על מנת להראות תכונת כפל בסקלר ברכיב הראשון, משתמשים באידיטיביות על ומראים עבור כל מספר טבעי. לאחר מכן בעזרת הגדרה שמינוס יוצא החוצה ומראים לכל מספר טבעי. מתכונת כפל בסקלר עבור שלמים, ניתן להראות עבור רצינוליים, ובעזרת רציונליים, על ידי שימוש בגבול, עבור כל מספר ממשי).

פתרון:

1)

נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ב$-\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle-\langle -v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle+\langle u,v-u\rangle+\langle v,u-v\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\langle u,u+v+v-u\rangle+\langle v,u+v+u-v\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(\langle u,2v\rangle+\langle v,2u\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle\right)=\frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle+2\langle u,v\rangle\right)=\langle u,v\rangle$$

נבדוק שהמכפלה הפנימית משרה את הנורמה, ושתכונות המכפלה הפנימית מתקיימות.

2)

(א) מתקיים:

$$\langle u,u\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+u\|^2 - \|u-u\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|2u\|^2 - \|0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(4\|u\|^2\right) = \|u\|^2$$

ולכן הנורמה אכן מושרית מהמכפלה הפנימית (אם היא אכן כזו).

(ב) לפי חוקי הנורמה, $\langle u,u\rangle = \|u\|^2 \geq 0$ וגם:

$$u=0 \iff \|u\|=0 \iff \langle u,u\rangle = \|u\|^2 = 0$$

ולכן אי־שליליות מתקיימת.

(ג) סימטריות (אנחנו מעל $\mathbb{R}$) היא טריוויאלית:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2\right) = \langle v,u\rangle$$

(ד) נראה שמתקיימת אדיטיביות, כלומר: $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$. נכפיל הכל ב-$8$ כדי לא להתעסק עם שברים, ואנו צריכים להוכיח את השוויון השקול:

$$8\langle u+v,w\rangle - 8\langle u,w\rangle - 8\langle v,w\rangle = 0$$

מהגדרת הפונקציה:

$$= 2\|u+v+w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2 - 2\|u+w\|^2 + 2\|u-w\|^2 - 2\|v+w\|^2 + 2\|v-w\|^2 =$$

לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u\pm w\|^2 + \|v\pm w\|^2\right) = \|u+v\pm 2w\|^2 + \|u-v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$2\|u+v+w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2 + \|u+v-2w\|^2 + \|u-v\|^2 - \|u+v+2w\|^2 - \|u-v\|^2 =$$

$$= 2\|u+v+w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2 + \|u+v-2w\|^2 - \|u+v+2w\|^2 =$$

$$= \left(\|u+v-2w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2\right) - \left(2\|u+v+w\|^2 - \|u+v+2w\|^2\right)$$

שוב, לפי שוויון המקבילית:

$$2\left(\|u+v\pm w\|^2 + \|\pm w\|^2\right) = \|u+v\pm 2w\|^2 + \|u+v\|^2$$

וזה שקול ל:

$$\|u+v\pm 2w\|^2 - 2\|u+v\pm w\|^2 = 2\|\pm w\|^2 - \|u+v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל:

$$\left(2\|w\|^2 - \|u+v\|^2\right) - \left(2\|-w\|^2 - \|u+v\|^2\right) = 0$$

ולכן אדיטיביות מתקיימת.

(ה) נוכיח מולטיפלטיביות, כלומר $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$ נעשה זאת בשלבים.

i. ראשית, נוכיח באינדוקציה שהטענה נכונה לכל n טבעי. עבור $n=1$,

$$\langle 1\cdot u, v\rangle = \langle u, v\rangle = 1\cdot\langle u, v\rangle$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$. נניח שהטענה נכונה עבור $a-1$:

$$(a-1)\langle u, v\rangle = \langle (1-a)u, v\rangle$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור a:

$$\langle au, v\rangle = \langle (a-1+1)u, v\rangle = \langle (a-1)u, v\rangle + \langle 1\cdot u, v\rangle =$$

ולפי הנחת האינדקוציה:

$$= (a-1)\langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle = a\langle u, v\rangle$$

ii. עבור $a=0$ הטענה טריוויאלית:

$$\langle 0u, v\rangle = \langle 0, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+0\|^2 - \|v-0\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|v\|^2 - \|v\|^2\right) = 0 = 0\langle u, v\rangle$$

iii. עבור $a \in \mathbb{Z}$ שלילי, מסעיף א' אנו יודעים:

$$\langle (-a)\, u, v \rangle = (-a) \langle u, v \rangle = -a \langle u, v \rangle$$

בעזרת אדיטיביות וסעיף ב':

$$\langle au, v \rangle + \langle (-a)\, u, v \rangle = \langle (a + (-a))\, u, v \rangle = \langle 0u, v \rangle = 0$$

ולכן גם $\langle (-a)\, u, v \rangle = - \langle au, v \rangle$ ומכאן:

$$\langle -au, v \rangle = -a \langle u, v \rangle$$

נכפיל את שני האגפים ב$-1-$ וסיימנו.

iv. עבור $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, כאשר $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, מתקיים $m = na$. מהסעיפים הקודמים:

$$n \langle au, v \rangle = \langle nau, v \rangle = \langle mu, v \rangle = m \langle u, v \rangle = na \langle u, v \rangle$$

נצמצם ב$-n$ וסיימנו.

v. עבור $a \in \mathbb{R}$ כללי, ניקח סדרה $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ששואפת ל$-a$.

לפיכך, $a_n - a \to 0$ ולכן:

$$\|(a_n - a)\, u\| = |a - a_n| \cdot \|u\| \to 0$$

כמו כן, $(a_n - a)\, u = (a_n u \pm w) - (au \pm w)$ ולכן גם:

$$\|au \pm w\| - \|a_n u \pm w\| \to 0$$

לפי שאלה 1. לכן:

$$\langle au, w \rangle - \langle a_n u, w \rangle = \frac{1}{4} \left(\|au + w\| - \|a_n u + w\| - \|au - w\| + \|a_n u - w\| \right) \to 0$$

כלומר $\langle a_n u, w \rangle \to \langle au, w \rangle$. ברור ש: $a_n \langle u, w \rangle \to a \langle u, w \rangle$.

לפי סעיף ד',

$$\langle a_n u, w \rangle = a_n \langle u, w \rangle$$

ולכן לפי יחידות הגבול:

$$\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$$

והוכחנו שמולטיפלטיביות מתקיימת. בסך הכל הוכחנו את הדרוש.

תרגיל 3. נאמר שהנורמות $\|\cdot\|_a$ ו $\|\cdot\|_b$ על V שקולות, אם קיימים קבועים $0 < \alpha, \beta$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים

$$.\alpha\|v\|_a \le \|v\|_b \le \beta\|v\|_a$$

הראו, ששקילות נורמות היא יחס שקילות.

פתרון:
נאמר ששתי נורמות הן שקולות אם קיימים שני קבועים $\alpha, \beta > 0$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים

$$\alpha\|v\|_a \le \|v\|_b \le \beta\|v\|_a$$

נראה שקילות הנורמות הוא יחס שקילות.
יש להראות 3 דברים:
1) ברור שמתקיימת בכונת הפרלקסיביותת נבחר $\alpha = \beta = 1$ ונקבל:

$$\|v\|_a \le \|v\|_a \le \|v\|_a$$

לכל $v \in V$
2) סימטריות:
לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\alpha\|v\|_a \le \|v\|_b \le \beta\|v\|_a$$

עבור $\alpha, \beta > 0$ ומכאן נובע ש־$\|v\|_a \le \frac{1}{\alpha}\|v\|_b$, ובאותו אופן מתקיים $\frac{1}{\beta}\|v\|_b \le \|v\|_a$.
ולכן

$$\frac{1}{\beta}\|v\|_b \le \|v\|_a \le \frac{1}{\alpha}\|v\|_b$$

כלומר נורמת־a שקולה לנורמת־b אם ורק אם נורמת־b שקולה לנורמת a כלומר הסימטריות מתקיימת.
3) טרנזיטיביות:
נניח שנורמת־a ונורמת־b הן שקולות, ונניח שנורמת־b ונורמת c הן שקולות.
צריך להראות שנורמת a שקולה לנורמת c.
כלומר יש להראות שקיימים $\alpha, \beta > 0$ כך ש־$\alpha\|v\|_a \le \|v\|_c \le \beta\|v\|_a$
נשים לב שקיימים $\gamma, \delta > 0$ כך ש־$\delta\|v\|_a \le \|v\|_b \le \gamma\|v\|_a$ וגם קיימים $\omega, \epsilon > 0$ כך ש־$\omega\|v\|_b \le \|v\|_c \le \epsilon\|v\|_b$
מכאן קל לראות ש־$\alpha \cdot \omega \cdot \|v\|_a \le \omega \cdot \|v\|_b \le \|v\|_c$.
ומצד שני, $\|v\|_c \le \epsilon \cdot \|v\|_b \le \epsilon \cdot \gamma \cdot \|v\|_a$
נסמן: $C_1 = \alpha \cdot \omega$, $C_2 = \epsilon \cdot \gamma$, ברור ש־$C_1, C_2 > 0$, ולכן קיבלנו:

$$C_1\|v\|_a \le \|v\|_c \le C_2\|v\|_a$$

כלומר נורמת c ונורמת a הן שקולות.

תרגיל 4. הראו שמשוואת המישור ב $\mathbb{R}^3$ שעובר דרך הנקודה (p,q,r) ומאונך לוקטור (a,b,c) היא

$$.a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

פתרון:
ברור שכל וקטור במישור מסויים מאונך לוקטור כללי (a,b,c).
לפי הנתון, הנקודה (p,q,r)נמצאת על המישור, ולכן נבחר איזה שהוא וקטור כללי (x,y,z) שגם נמצא במישור.
ברור שגם הוקטור $(x-p,y-q,z-r)$ נמצא באותו מישור וגם הוא מאונך לוקטור (a,b,c), כלומר מתקיים:

ולכן $\langle (a,b,c),(x-p,y-q,z-r)\rangle=0$

$$a\cdot(x-p)+b\cdot(y-q)+c\cdot(z-r)=0$$

תרגיל 5. (תרגיל בונוס). המטרה של התרגיל הבא - להוכיח שהפונקציה המוגדרת על ידי

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x|^p}$$

עבור $p\geq 1$ מגדירה נורמה על $\mathbb{R}^n$. נורמה הזאת נקראת נורמת p.

1. הראו ש $\|x\|_p\geq 0$ ו $\|x\|=0$ אם ורק אם $x=0$.
2. הראו שמתקיים $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ו $x\in\mathbb{R}^n$.
3. יהיו $0<x,y\in\mathbb{R}$. הראו שלכל $0\leq t\leq 1$ מתקיים האי-שוויון הבא:

$$.(1-t)\ln x+t\ln y\leq \ln((1-t)x+ty)$$

(אינטואיציה גאומרית: הקטע שמחבר את הנקודות $(x,\ln x)$ ו $(y,\ln y)$ נמצא מתחת לגרף של הפונקציה $\ln$ בקטע $[x,y]$. ניתן לעשות חקירה ולהתשמש במחבן הנגזרת השניה).

4. יהיו $1<p,q\in\mathbb{R}$ כך ש $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. הראו, שלכל $0\leq a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$.ab<\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

(רמז: הציבו $t=\frac{1}{q}$ והשתמשו בסעיף הקודם).

5. יהיו $1<p,q\in\mathbb{R}$ כך ש $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ו $u,v\in\mathbb{R}^n$ כך ש $\|u\|_p=\|v\|_q=1$. הראו, בעזרת הסעיף הקודם, את האי-שוויון

$$.\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|\leq 1$$

והסיקו ממנו את אי-שוויון הולדר: לכל $1<p,q$ שמקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ולכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$.\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|\leq \|u\|_p\,\|v\|_q$$

6. הראו בעזרת האי-שוויון הולדר ובעזרת האי-שוויון

$$|u+v|^p \leq (|u|+|v|)\,|u+v|^{p-1}$$

את האי-שוויון הבא:

$$\|u+v\|_p^p \leq \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u+v\|_p^{p-1}$$

והסיקו ממנו את אי-שוויון מינקובסקי:

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \,,$$

שהוא למעשה האי-שוויון המשולש עבור נורמת p. הדרכה: כדאי להתחיל לפתח את הביטוי בצד השמאלי קודם. כמו כן, שימו לב שמתקיים

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|u_i+v_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|u+v\|_p^{p-1} \,.$$

פתרון. להלן פתרון לפי שלבים.

1. נובע מהתכונות של ערך מוחלט.

2.

$$\begin{aligned}
\|\alpha v\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha|^p\,|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \alpha\,\|v\|_p
\end{aligned}$$

כנדרש.

3. מחקירת פונקציה ידוע לנו, שאם לכל $x \in [a,b]$ הפונקציה f גזירה פעמיים ב x ו $f''0$ אזי הפונקציה קעורה ומתקיים לכל $t \in [0,1]$, $(1-t)\,f(a) + tf(b) \leq f((1-t)\,a+tb)$. (במילים אחרות, המיתר שמחבר את הנקודות $(a, f(a))$ ו $(b, f(b))$ נמצא מתחת לגרף של הפונקציה). אבל הפונקציה $\ln(x)$ גזירה פעמיים בכל $(0,\infty)$ מתקיים

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

ולכן $\ln x$ קעורה בכל קטע $[a,b] \subseteq (0,\infty)$.

4. אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ עבור $1<p,q$, נציב $t=\frac{1}{q}$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)&=\ln\left((1-t)\,a^{\frac{1}{1-t}}+tb^{\frac{1}{t}}\right)\\&\geq(1-t)\ln a^{\frac{1}{1-t}}+t\ln b^{\frac{1}{t}}\\&=\ln a+\ln a=\ln ab\end{aligned}$$

מכיוון ש $\ln$ היא פונקציה מונוטונית עולה, מכאן נובע ש

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab$$

לכל $0<a,b$ ש. (יש מקרה קציה שבו $a^p=b^q$ אבל אז מקבלים שוויון.)

5. נניח ש $\|u\|_p=1=\|v\|_q$. כלמר,

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p}=1=\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q}$$

אזי מתקיים

$$.\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p=1=\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p$$

מהסעיף הקודם, מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|&\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p}|u_i|^p+\frac{1}{q}|v_i|^q\\&=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

עכשיו, לכל $u,v\neq0$ מתקיים

$$\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|\leq1$$

על פי מה שהכוחנו. נכפיל את שני האגפים ב $\|u\|_p\|v\|_q$ ונקבל את הדרוש. אם $u=0$ או $v=0$ אז האי-שוויון מתקיים באופן טריוויאלי.

6. מתקיים

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|\,|u_i+v_i|^{p-1} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left(|u_i|+|v_i|\right)|u_i+v_i|^{p-1} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |u_i|\,|u_i+v_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |v_i|\,|u_i+v_1|^{p-1} \\
\left(q=\frac{p}{p-1}\right) &\le \|u\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}\left(|u_i+v_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \|v\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}\left(|u_i+v_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)\|u+v\|_p^{p-1}
\end{aligned}
$$

נחלק את שני של האי שוויון ב $\|u+v\|_p^{p-1}$ ונקבל

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

כנדרש.