פתרון תרגיל בית 6 תורת גלואה - תשע"ח

1. תארו ע"י התאמת גלואה את התת־שדות של ההרחבות הבאות (בטאו כל תת־שדה ע"י יוצרים):

א. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^5-1 מעל $\mathbb{Q}$.

ב. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}}$ כאשר E שדה הפיצול של x^4-2 מעל $\mathbb{Q}$.

ג. ${}^{E}/_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
היעזרו בשורש היחידה $\rho_8=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

פתרון. א. ראינו כבר בתרגיל הקודם שהחבורה היא $U_5\cong\mathbb{Z}_4$ ונוצרת ע"י $\sigma:\rho_5\mapsto\rho_5^2$. שריג התת־חבורות הוא:

$$\begin{array}{c}\langle\sigma\rangle\\ |\\ \langle\sigma^3\rangle\\ |\\ 1\end{array}$$

ולכן שריג התת־שדות הוא:

$$\begin{array}{c}E^1=E\\ |\\ E^{\langle\sigma^3\rangle}=\mathbb{Q}[\rho_5+\rho_5^4]\\ |\\ E^{\langle\sigma\rangle}=\mathbb{Q}\end{array}$$

ב. ראינו כבר שהחבורה היא D_4 ונוצרת ע"י

$$\begin{aligned} \sigma\colon \sqrt[4]{2} &\mapsto \sqrt[4]{2}i \\ i &\mapsto i \\ \tau\colon \sqrt[4]{2} &\mapsto \sqrt[4]{2} \\ i &\mapsto -i \end{aligned}$$

. שריג התת־חבורות הוא:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & D_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \langle \tau, \sigma^2 \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \langle \sigma \rangle \arrow[d, dash] & \langle \sigma^2, \tau\sigma \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \tau \rangle \arrow[drr, dash] & \langle \tau\sigma^2 \rangle \arrow[dr, dash] & \langle \sigma^2 \rangle \arrow[d, dash] & \langle \tau\sigma^3 \rangle \arrow[dl, dash] & \langle \tau\sigma \rangle \arrow[dll, dash] \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

. ולכן שריג התת־שדות הוא:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & E = \mathbb{Q}[\alpha, i] \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathbb{Q}[\alpha] \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}[i\alpha] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & E^{\langle \tau\sigma^3 \rangle} \arrow[d, dash] & E^{\langle \tau\sigma \rangle} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}[i] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}[\sqrt{2}i] \arrow[dl, dash] & \\
 & & \mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

. הסברים: את רב שדות הביניים קל לנחש, לבדוק את המימד שלהם ואז למקם אותם נכון (לפי איזו העתקה שומרת עליהם, ולפי שדות המוכלים בהם או מכילים אותם).

לגבי $E^{\langle \tau\sigma^3 \rangle}$: המסלול של $\alpha = \sqrt[4]{2}$ תחת $\tau\sigma^3$ הוא $\alpha \mapsto i\alpha \mapsto \alpha$ ולכן ניקח $\alpha + i\alpha$. אם כן $\mathbb{Q}[(1+i)\alpha] \subseteq E^{\langle \tau\sigma^3 \rangle}$. ניתן לבדוק (וצריך! למשל ע"י חישוב המסלול של $(1+i)\alpha$ תחת D_4) שהמימד של $\mathbb{Q}[(1+i)\alpha]$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא 4 ולכן יש שיוויון.

לגבי $E^{\langle \tau\sigma \rangle}$: המסלול של $\alpha = \sqrt[4]{2}$ תחת $\tau\sigma$ הוא $\alpha \mapsto -i\alpha \mapsto \alpha$

ולכן ניקח $\alpha - i\alpha$. אם כן $\mathbb{Q}[(1-i)\alpha] \subseteq E^{\langle\tau\sigma\rangle}$. ניתן לבדוק (וצריך! למשל ע"י חישוב המסלול של $(1-i)\alpha$ תחת D_4) שהמימד של $\mathbb{Q}[(1-i)\alpha]$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא 4 ולכן יש שיוויון.

ג. ראינו כבר שהחבורה היא $\mathbb{Z}_2$ ונוצרת ע"י $\sigma\colon i \mapsto -i$. שריג התת־חבורות הוא: $\begin{array}{c} \mathbb{Z}_2 \\ \vert \\ 1 \end{array}$ ולכן שריג התת־שדות הוא: $\begin{array}{c} E \\ \vert \\ F \end{array}$.

2. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות או לא. באם לא, מצאו את הסגור הנורמלי.

א. $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\right]/_{\mathbb{Q}}$.

ב. $\mathbb{Q}[\rho_5]/_{\mathbb{Q}}$ כאשר ρ_5 הוא שורש יחידה 5–פרימיטיבי.

ג. $\mathbb{Q}(x)/_{\mathbb{Q}(x^3)}$.

.

פתרון:

א. ההרחבה לא נורמלית כי הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^3 - 2$ והשורשים הנוספים הם מרוכבים ולא שייכים לשדה.
הסגור הנורמלי הוא לספח את השורשים (השורשים של הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ כבר שייכים לשדה): $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho_3, \sqrt[3]{2}\rho_3^2\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \rho_3\right]$.

ב. ההרחבה היא נורמלית, כי השורשים של הפולינום המינימלי של ρ_5 הם ρ_5^i שכולם שייכים לשדה.

ג. הפולינום המינימלי של x מעל $\mathbb{Q}(x^3)$ הוא $\lambda - x^3$ ששורשיו המרוכבים לא שייכים לשדה, ולכן ההרחבה לא נורמלית. הסגור הנורמלי הוא $\mathbb{Q}\left[x, \rho_3\right]$.

3. הוכיחו כי כל הרחבה $K/_{F}$ ממימד 2 היא נורמלית.

פתרון. . יהי $K \in \alpha$ איבר כלשהו. הפולינום המינימלי הוא בהכרח מדרגה 2 (למה?...) . מעל K הפולינום מתפרק (כי αשורש בשדה) ל־ $(x-\alpha)(x-\beta)$. כלומר שהפולינום מתפצל מעל K.

4. תהיינה הרחבות סופיות $K/F, L/F$.

א. נתון כי K/F הרחבת גלואה, הוכיחו כי KL/L היא הרחבת גלואה.

ב. נתון כי $K/F, L/F$ הן גלואה, הוכיחו כי KL/F ו $K\cap L/F$ גלואה.

פתרון. א. לפי הנתון K הוא שדה פיצול של פולינום ספרבילי $f(x) \in F[x]$. כמובן ש$f(x)$ הוא גם פולינום מעל L, וברור שמתפצל מעל KL (כי מכיל את K). נראה שזה השדה המינימלי מעל L שעושה זאת: נניח שיש הרחבה E/L כך ש־ $f(x)$ מתפצל מעל E. E מכיל את F, וממינימליות של K כשדה פיצול מעל F נובע ש $K \subseteq E$. ביחד נקבל ש $KL \subseteq E$.

דרך אחרת (בקיצור): נרשום את השורשים $a_1,\ldots,a_n$ אזי $K = F[a_1,\ldots,a_n]$ ומתרגיל עבר $KL = L[a_1,\ldots,a_n]$ ורואים שזהו שדה הפיצול מעל L.

ב. ראשית עבור KL: לפי התרגיל הקודם KL/L ספרבילי, ולפי הנתון L/F ספרבילי (כי זו הרחבת גלואה) ולכן KL/F ספרבילית (שכן ספרביליות היא תכונה טרנזיטיבית).

כעת נרשום $K = F[a_1,\ldots,a_n],\ L = F[b_1,\ldots,b_m]$ ואז (הוכחנו בעבר) $KL = F[a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m]$. לכל יוצר, הפולינום המינימלי שלו מעל F מתפצל מעל K או L ולכן בודאי מתפצל מעל KL. ולכן ההרחבה היא גם נורמלית. יחד קבלנו שההרחבה היא גלואה.

עבור $K\cap L$: זהו תת־שדה של K (גם של L) שהוא הרחבה ספרבילית, ולכן גם הוא ספרבילי. עבור איבר $a \in K\cap L$, נסמן את הפולינום המינימלי שלו $f_a \in F[x]$. מכיוון שK נורמלי ו$a \in K$, f_a מתפצל שם־ כלומר שכל שורשי f_a שייכים לK. מאותה סיבה, כל השורשים שייכים לL. כלומר קיבלנו שהשורשים ב$K \cap L$ ולכן זו הרחבה נורמלית. יחד נקבל שזו הרחבת גלואה.

5. תהי ${}^{E}\!/_{F}$ הרחבת גלואה ממימד p^n. הוכיחו כי לכל $1 \leq k < n$ קיים שדה ביניים $F \subseteq K \subseteq E$ כך ש $[E\colon K] = p^k$. (רמז: תכונה של חבורות p).

פתרון. . $\mathrm{Gal}\,(E/F)$ היא חבורת p. תכונה ידועה של חבורות p מסדר p^n היא שיש להן תת־חבורה H_k מסדר p^k לכל $0 \leq k \leq n$. לפי התאמת גלואה, המימד של E מעל שדה השבת המתאים E^{H_K} הוא p^k .