

## פתרון תרגיל בית 6 תורת גלואה – תשע"ח

1. תארו ע"י התאמת גלואה את התת-שדות של ההרחבות הבאות (בטאו כל תת-שדה ע"י יוצרים):

- א.  $E/\mathbb{Q}$  כאשר  $E$  הוא שדה הפיצול של  $x^5 - 1$  מעל  $\mathbb{Q}$ .
- ב.  $E/\mathbb{Q}$  כאשר  $E$  שדה הפיצול של  $x^4 - 2$  מעל  $\mathbb{Q}$ .
- ג.  $E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  כאשר  $E$  הוא שדה הפיצול של  $x^4 + 1$  מעל  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .  
היעזרו בשורש היחידה  $\rho_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

**פתרון. א.** ראינו כבר בתרגיל הקודם שהחבורה היא  $U_5 \cong \mathbb{Z}_4$  ונוצרת ע"י  $\sigma: \rho_5 \mapsto \rho_5^2$ . שריג התת-חבורות הוא:

$$\begin{array}{c} \langle \sigma \rangle \\ | \\ \langle \sigma^3 \rangle \\ | \\ 1 \end{array}$$

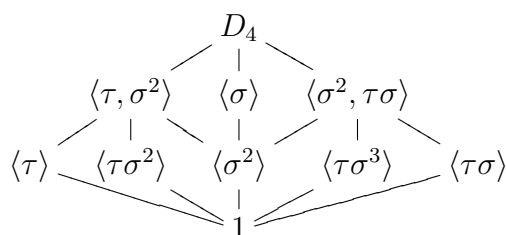
ולכן שריג התת-שדות הוא:

$$\begin{array}{c} E^1 = E \\ | \\ E^{\langle \sigma^3 \rangle} = \mathbb{Q}[\rho_5 + \rho_5^4] \\ | \\ E^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q} \end{array}$$

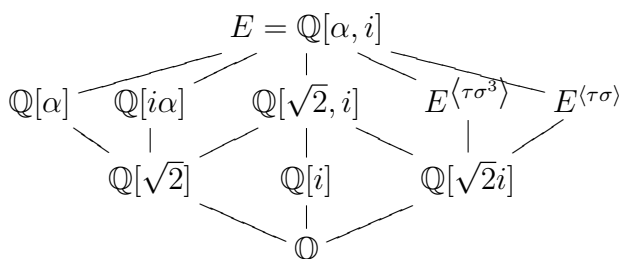
ב. ראינו כבר שהחבורה היא  $D_4$  ונוצרת ע"י

$$\begin{aligned} \sigma: \sqrt[4]{2} &\mapsto \sqrt[4]{2}i \\ i &\mapsto i \\ \tau: \sqrt[4]{2} &\mapsto \sqrt[4]{2} \\ i &\mapsto -i \end{aligned}$$

. שריג התת-חבורות הוא:



. ולכן שריג התת-שדות הוא:



. הסברים: את רב שדות הביניים קל לנחש, לבדוק את המימד שלהם ואז למקם אותם נכון (לפי איזו העתקה שומרת עליהם, ולפי שדות המוכללים בהם או מכילים אותם).

לגבי  $E^{\langle \tau \sigma^3 \rangle}$ : המסלול של  $\alpha = \sqrt[4]{2}$  תחת  $\tau \sigma^3$  הוא  $\alpha \mapsto i\alpha \mapsto \alpha$  ולכן ניקח  $\alpha + i\alpha$ . אם כן  $\mathbb{Q}[(1+i)\alpha] \subseteq E^{\langle \tau \sigma^3 \rangle}$ . ניתן לבדוק (וצריך!) למשל ע"י חישוב המסלול של  $(1+i)\alpha$  תחת  $D_4$  שהמימד של  $\mathbb{Q}[(1+i)\alpha]$  מעל  $\mathbb{Q}$  הוא 4 ולכן יש שיוויון.

לגבי  $E^{\langle \tau \sigma \rangle}$ : המסלול של  $\alpha = \sqrt[4]{2}$  תחת  $\tau \sigma$  הוא  $\alpha \mapsto -i\alpha \mapsto \alpha$

ולכן ניקח  $\alpha - i\alpha$ . אם כן  $E^{\langle \tau \sigma \rangle} \subseteq \mathbb{Q}[(1-i)\alpha]$ . ניתן לבדוק (וצריך!) למשל ע"י חישוב המסלול של  $(1-i)\alpha$  תחת  $(D_4)$  שהמימד של  $\mathbb{Q}[(1-i)\alpha]$  מעל  $\mathbb{Q}$  הוא 4 ולכן יש שיוויון.

ג. ראינו כבר שהחבורה היא  $\mathbb{Z}_2$  ונוצרת ע"י  $-i$ .  $\sigma: i \mapsto -i$ . שריג התת-

$E$	$\mathbb{Z}_2$
$F$	$1$

חבורות הוא: | ולכן שריג התת-שדות הוא: | .

2. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות או לא. באם לא, מצאו את הסגור הנורמלי.

א.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$

ב.  $\mathbb{Q}[\rho_5]/\mathbb{Q}$  כאשר  $\rho_5$  הוא שורש יחידה 5-פרימיטיבי.

ג.  $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}(x^3)$

**פתרון:**

א. ההרחבה לא נורמלית כי הפולינום המינימלי של  $\sqrt[3]{2}$  מעל  $\mathbb{Q}$  הוא

$$x^3 - 2 \text{ והשורשים הנוספים הם מרוכבים ולא שייכים לשדה.}$$

הסגור הנורמלי הוא לספח את השורשים (השורשים של הפולינום

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho_3, \sqrt[3]{2}\rho_3^2] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \rho_3]$$

ב. ההרחבה היא נורמלית, כי השורשים של הפולינום המינימלי של  $\rho_5$

$$\text{הם } \rho_5^i \text{ שכולם שייכים לשדה.}$$

ג. הפולינום המינימלי של  $x$  מעל  $\mathbb{Q}(x^3)$  הוא  $\lambda - x^3$  ששורשיו המרוכבים

לא שייכים לשדה, ולכן ההרחבה לא נורמלית. הסגור הנורמלי הוא

$$\mathbb{Q}[x, \rho_3]$$

3. הוכיחו כי כל הרחבה  $K/F$  ממימד 2 היא נורמלית.

**פתרון .** יהי  $\alpha \in K$  איבר כלשהו. הפולינום המינימלי הוא בהכרח מדרגה 2 (למה?...). מעל  $K$  הפולינום מתפרק (כי  $\alpha$  שורש בשדה) ל-  
 $(x - \alpha)(x - \beta)$ . כלומר שהפולינום מתפצל מעל  $K$ .

4. תהיינה הרחבות סופיות  $K/F, L/F$ .

- א. נתון כי  $K/F$  הרחבת גלואה, הוכיחו כי  $KL/L$  היא הרחבת גלואה.  
 ב. נתון כי  $K/F, L/F$  הן גלואה, הוכיחו כי  $KL/F$  ו  $K \cap L/F$  גלואה.

**פתרון . א.** לפי הנתון  $K$  הוא שדה פיצול של פולינום ספרבילי  $f(x) \in F[x]$ . כמובן ש  $f(x)$  הוא גם פולינום מעל  $L$ , וברור שמתפצל מעל  $KL$  (כי מכיל את  $K$ ). נראה שזה השדה המינימלי מעל  $L$  שעושה זאת: נניח שיש הרחבה  $E/L$  כך ש-  $f(x)$  מתפצל מעל  $E$ . מכיל את  $F$ , וממינימליות של  $K$  כשדה פיצול מעל  $F$  נובע ש  $K \subseteq E$ . ביחד נקבל ש  $KL \subseteq E$ .

דרך אחרת (בקיזור): נרשום את השורשים  $a_1, \dots, a_n$  אזי  $K = F[a_1, \dots, a_n]$  ומתרגיל עבר  $KL = L[a_1, \dots, a_n]$  ורואים שזהו שדה הפיצול מעל  $L$ .

ב. ראשית עבור  $KL$ : לפי התרגיל הקודם  $KL/L$  ספרבילי, ולפי הנתון  $L/F$  ספרבילי (כי זו הרחבת גלואה) ולכן  $KL/F$  ספרבילית (שכן ספרביליות היא תכונה טרנזיטיבית).

כעת נרשום  $K = F[a_1, \dots, a_n], L = F[b_1, \dots, b_m]$  ואז (הוכחנו בעבר)  $KL = F[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$ . לכל יוצר, הפולינום המינימלי של מעל  $F$  מתפצל מעל  $K$  או  $L$  ולכן בודאי מתפצל מעל  $KL$ . ולכן ההרחבה היא גם נורמלית. יחד קבלנו שההרחבה היא גלואה. עבור  $K \cap L$ : זהו תת-שדה של  $K$  (גם של  $L$ ) שהוא הרחבה ספרבילית, ולכן גם הוא ספרבילי. עבור איבר  $a \in K \cap L$ , נסמן את הפולינום המינימלי שלו  $f_a \in F[x]$ . מכיוון ש  $K$  נורמלי ו  $a \in K$ ,  $f_a$  מתפצל שם- כלומר שכל שורשי  $f_a$  שייכים ל-  $K$ . מאותה סיבה, כל השורשים שייכים ל-  $L$ . כלומר קיבלנו שהשורשים ב  $K \cap L$  ולכן זו הרחבה נורמלית. יחד נקבל שזו הרחבת גלואה.

5. תהי  $E/F$  הרחבת גלואה ממימד  $p^n$ . הוכיחו כי לכל  $1 \leq k < n$  קיים שדה ביניים  $F \subseteq K \subseteq E$  כך ש  $[E:K] = p^k$ . (רמז: תכונה של חבורות  $(p)$ ).

**פתרון.**  $\text{Gal}(E/F)$  היא חבורת  $p$ . תכונה ידועה של חבורות  $p$  מסדר  $p^n$  היא שיש להן תת-חבורה  $H_k$  מסדר  $p^k$  לכל  $0 \leq k \leq n$ . לפי התאמת גלואה, המימד של  $E$  מעל שדה השבת המתאים  $E^{H_k}$  הוא  $p^k$ .