ב"ה

שאלה 1

תהי G חבורה מסדר 56. הוכח שיש לה תת־חבורה 2־סילוב נורמלית או תת־חבורה 7־סילוב נורמלית.

תשובה:

נשים לב כי $56=8\cdot 7=2^3\cdot 7$. יהי n_7 המספר של תת"ח 7-סילוב.

לפי משפט סילוב 3, מתקיים $n_7 \mid 8 \Rightarrow n_7\in\{1,2,4,8\}$, וגם $n_7\equiv 1 \mod 7$.

סך הכל, קיבלנו $n_7\in\{1,8\}$. אם $n_7=1$, אז יש תת-חבורה 7-סילוב יחידה ולכן נורמלית, לפי משפט סילוב השני, ואז סיימנו.

אז נניח $n_7=8$ ויהיו $P_1,P_2,\dots,P_8\le G$ התת-חבורות 7-סילוב.

לפי הפירוק של 56, $|P_i|=7$ לכל i. אך לפי משפט לגרנז' הסדר של כל איבר של P_i מחלק את 7, כלומר הינו 1 או 7. זה אומר כי בכל P_i יש 6 איברים מסדר 7, וגם איבר היחידה e.

בנוסף, $|P_i\cap P_j| \mid |P_i|$ לכל i,j לפי לגרנז' (כי החיתוך של שתי חבורות הינו תת-חבורה של שתיהן). מכאן מסיקים שאם $i\neq j$, אז

$|P_i\cap P_j|=1 \Rightarrow |P_i\cap P_j|=\{e\}$ (אחרת $|P_j|=|P_i\cap P_j|=7=|P_i| \Rightarrow P_i=P_i\cap P_j$
$P_j=P_i\cap P_j$

$\Rightarrow P_i=P_j$ בסתירה ל-$i\neq j$). זה אומר שהאיברים הלא-טריוויאליים המופיעים בכל P_i כולם <u>שונים</u>, ומצאנו $8\cdot 6=48$ איברים של G מסדר 7. תהי $S\subseteq G$ הקבוצה (היא לא תת-חבורה) של האיברים האלה.

תהי $Q\le G$ תת-חבורה 2-סילוב. אזי $|Q|=2^3=8$, ו-Q לא מכילה שום איבר מסדר 7 (כי $7\nmid 8$). לכן $Q\subseteq G\setminus S$. אך $|G\setminus S|=56-48=8$, לכן חייב להיות $Q=G\setminus S$. זה אומר שיש תת-חבורה 2-סילוב יחידה ($n_2=1$) ולכן נורמלית, ושוב סיימנו.

<u>הערה</u>: תהיינה Q_1,Q_2 שתי תת"ח 2-סילוב שונות. אזי $Q_1\cap Q_2\le Q_1$, תת"ח אמיתית של Q_1. אבל $|Q_1|=8$ לא ראשוני, אז אי אפשר להסיק מיד כי $Q_1\cap Q_2=\{e\}$ (אפשר גם $|Q_1\cap Q_2|\in\{2,4\}$), אז אי אפשר להסיק מיד כי האיברים הלא-טריוויאליים של Q_1,Q_2 כולם שונים.

שאלה 2

א. תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית כך ש־ $|H| = 2$. הוכח כי $H \leq Z(G)$.

ב. הוכח או הפרך: תהי G חבורה ותהי $H \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית כך ש־ $|H| = 3$. אזי $H \leq Z(G)$.

תשובה:

א) כיוון ש-H תת-חבורה, $e \in H$. אזי $H = \{e, h\}$, כאשר $h \neq e$.

ויהי $g \in G$. אזי $H \trianglelefteq G \Leftarrow$

$$\{e, h\} = H = gHg^{-1} = \{geg^{-1}, ghg^{-1}\} = \{e, ghg^{-1}\}.$$

זה אומר $h = ghg^{-1}$ לכל $g \in G$

כלומר $hg = gh$ לכל $g \in G$, כלומר $h \in Z(G)$.

ברור כי $e \in Z(G)$, לכן $H \subseteq Z(G)$. אבל H תת״ח של G, אז גם של $Z(G)$.

ב) כולם בחרו בדוגמא $G = S_3$, $H = A_3$

או $G = D_3$, $H = \langle \sigma \rangle$ (וצריך אחרת לנמק את אופן החבורות).

אזי $H \trianglelefteq G$ כי $[G:H] = \frac{6}{3} = 2$ (או כי $H = \ker(\mathrm{sgn})$ וגרעין של הומומורפיזם גם נורמלי!).

ברור כי $|H| = 3$. אך $(1\ 2\ 3) \in A_3$, אבל

$(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3) \neq (1\ 3) = (1\ 2\ 3)(1\ 2)$ (או $\sigma\tau \neq \tau\sigma$)

לכן $(1\ 2\ 3) \notin Z(G)$ (או $\sigma \notin Z(G)$). ולכן H לא מוכלת ב-$Z(G)$.

שאלה 3

לכל זוג של חבורות, קבע האם הן איזומורפיות:

א. **חבורות המנה** G/H **ו־**G/K**, כאשר** $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,\ H=\langle([2],[0])\rangle,\ K=\langle([0],[1])\rangle$.

ב. **החבורה** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **והחבורה** $\mathbb{Q}$**, שתיהן עם פעולת החיבור.**

ג. **החבורה** $\mathbb{Q}/\langle 2\rangle$ **והחבורה** $\mathbb{Q}/\langle 3\rangle$**, עם פעולת החיבור.**

תשובה:

א) נשים לב כי $|G|=8$,

$H=\{([2],[0]),([0],[0])\}$

$K=\{([0],[1]),([0],[0])\}$

לכן $|G/H|=\frac{8}{2}=4=|G/K|$ ולכן ניתן לקבוע דבר על סמך הסדרים של שני החבורות. נשים לב שלכל $g=([a],[b])\in G$,

$g^2=([2a],[2b])=([2a],[0])\in\{([2],[0]),([0],[0])\}=H$.

לכן, לכל $gH\in G/H$, מתקיים $(gH)^2=g^2H=eH=e_{G/H}$.

לעומת זאת, נתבונן באיבר $g=([1],[0])\notin K$.

$g^2=([2],[0])\notin K$.

לכן, $o(gK)>2$ בחבורה G/K. ראינו כי ב-G/H הסדר של כל איבר אינו גדול מ-2, ואילו ב-G/K יש איברים בעלי סדרים גדולים מ-2. אז החבורות G/H, G/K לא איזומורפיות.

באמת, $G/H\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $G/K\simeq\mathbb{Z}_4$.

ב) פתרון 1 נניח בשלילה שיש איזומורפיזם $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. בפרט, f על, אז קיים שבר $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ כך ש- $f(\frac{m}{n})=(1,1)$.

נתבונן ב- $\frac{m}{2n}\in\mathbb{Q}$. אזי

$$f\left(\frac{m}{2n}\right)+f\left(\frac{m}{2n}\right)=f\left(\frac{m}{2n}+\frac{m}{2n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)=(1,1)$$

אבל לא קיים שום $g\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש- $g+g=(1,1)$, אז אין לנו לשלוח את $\frac{m}{2n}$. סתירה. לכן $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\not\simeq\mathbb{Q}$.

<u>פתרון ב</u> נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$. החבורה $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ נוצרת על ידי שני האיברים $(1,0),(0,1)$. לכן,

$$f(m,n)=f\left((1,0)^m(0,1)^n\right)=f(1,0)^m f(0,1)^n$$

כיוון ש-f על, $\mathbb{Q}$ נוצרת על ידי שני האיברים $f(1,0), f(0,1)$. אך יהיו $f(1,0)=\frac{m_1}{n_1}$, $f(0,1)=\frac{m_2}{n_2}$ אזי

$$f(a,b)=f(1,0)^a f(0,1)^b=\frac{am_1}{n_1}+\frac{bm_2}{n_2}=\frac{am_1n_2+bm_2n_1}{n_1n_2}.$$

בפרט, שום שבר מצומצם עם מכנה גדול מ-n_1n_2 לא יכול להופיע ב-$\mathrm{Im}f$. אך f על. סתירה. לכן $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\not\cong\mathbb{Q}$.

<u>אנטי-פתרון</u> $|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$, אך לא ניתן לקבוע דבר על סמך העוצמות.

ג) נגדיר העתקה $f:\mathbb{Q}/\langle 2\rangle\to\mathbb{Q}/\langle 3\rangle$ על ידי

$$f(x+\langle 2\rangle)=\frac{3}{2}x+\langle 3\rangle$$

<u>f מוגדרת היטב</u> יהיו $x,y\in\mathbb{Q}$ שני נציגים של אותה מחלקה ב-$\mathbb{Q}/\langle 2\rangle$. זה אומר $x-y\in\langle 2\rangle=\{\dots,-2,0,2,\dots\}$. כלומר $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y\in\{\dots,-3,0,3,6,\dots\}=\langle 3\rangle$, כלומר $\frac{3}{2}x+\langle 3\rangle=\frac{3}{2}y+\langle 3\rangle$.

<u>f הומומורפיזם</u>

$$f(x+\langle 2\rangle)+f(y+\langle 2\rangle)=\left(\frac{3}{2}x+\langle 3\rangle\right)+\left(\frac{3}{2}y+\langle 3\rangle\right)=$$

$$\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y\right)+\langle 3\rangle=\frac{3}{2}(x+y)+\langle 3\rangle=$$

$$f(x+y+\langle 2\rangle)=f\left((x+\langle 2\rangle)+(y+\langle 2\rangle)\right).$$

<u>f על</u> יהי $z+\langle 3\rangle\in\mathbb{Q}/\langle 3\rangle$. אזי $f\left(\frac{2}{3}z+\langle 2\rangle\right)=z+\langle 3\rangle$

<u>f חח"ע</u> נניח $f(x+\langle 2\rangle)=f(y+\langle 3\rangle)$ $\Leftarrow$

$\frac{3}{2}x+\langle 3\rangle=\frac{3}{2}y+\langle 3\rangle$ $\Leftarrow$ $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y\in\langle 3\rangle=\{\dots,-3,0,3,6,\dots\}$ $\Leftarrow$

$x-y\in\langle 2\rangle=\{\dots,-2,0,2,4,\dots\}$ $\Leftarrow$

$x+\langle 2\rangle=y+\langle 2\rangle$

מצאנו איזומורפיזם f, אזי $\mathbb{Q}/\langle 2\rangle\cong\mathbb{Q}/\langle 3\rangle$

שאלה 4

יהי $\sigma = (1\,2) \in S_4$.

א. מצא את המרכז $C_{S_4}(\sigma)$.

ב. תן רשימה של נציגים של כל קוסט ב־$S_4/C_{S_4}(\sigma)$.

תשובה: <u>פתרון 1</u>

א) יהי $\tau \in S_4$. אזי:

$$\tau \in C_{S_4}(\sigma) \iff \sigma\tau = \tau\sigma \iff (\tau(1)\ \tau(2)) = \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma = (1\ 2) \iff \{\tau(1), \tau(2)\} = \{1, 2\}.$$

אז יש שני אפשרויות:

1) $\tau(1)=1,\ \tau(2)=2 \Rightarrow \tau \in \{e, (3\,4)\}$

2) $\tau(1)=2,\ \tau(2)=1 \Rightarrow \tau \in \{(1\,2), (1\,2)(3\,4)\}$.

קיבלנו $C_{S_4}(\sigma) = \{e, (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$.

<u>פתרון 2</u> הצמודים של $(1\,2)$ הם אלה עם מבנה מחזורים $(*\,*)$ ויש $\binom{4}{2}=6$ כאלה. אך הוכחנו בשיעור כי $|conj(\sigma)| = [G : C_G(\sigma)]$ $(G = S_4)$, לכן

$$6 = \frac{|G|}{|C_G(\sigma)|} = \frac{24}{|C_G(\sigma)|} \Rightarrow |C_G(\sigma)| = 4.$$

בודקים ישירות שארבעת האיברים הנ"ל שייכים ל-$C_{S_4}(\sigma)$. אך כיוון ש-$|C_{S_4}(\sigma)|=4$, ברור שמצאנו את כל האיברים.

ב) כולם פשוט חישבנו את שש הקוסטים:

$\{e, (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$

$\{(1\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,4), (1\,2\,3\,4)\}$

$\{(1\,4), (1\,2\,4), (1\,4\,3), (1\,2\,4\,3)\}$

$\{(2\,3), (1\,3\,2), (2\,3\,4), (1\,3\,4\,2)\}$

$\{(2\,4), (1\,4\,2), (2\,4\,3), (1\,4\,3\,2)\}$

$\{(1\,3)(2\,4), (1\,4\,2\,3), (1\,3\,2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

כל קבוצה של שש תמורות, אחת מכל קוסט, תהיה קבוצת נציגים לגיטימית.

יש דרך יותר קלה למצוא קבוצת נציגים, אבל אף אחד לא הלך בה. ראינו בשיעור, בחלק מן ההוכחה כי $|conj(\sigma)| = [S_4 : C_{S_4}(\sigma)]$, כי

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = \tau_2 \sigma \tau_2^{-1} \iff \tau_2^{-1}\tau_1 \sigma \tau_1^{-1}\tau_2 = \sigma \iff \tau_2^{-1}\tau_1\sigma = \sigma\tau_2^{-1}\tau_1$$

$$\iff \tau_2^{-1}\tau_1 \in C_{S_4}(\sigma) \iff \tau_1 C_{S_4}(\sigma) = \tau_2 C_{S_4}(\sigma) \iff$$ τ_1, τ_2 שייכים לאותו קוסט.

האיברים הצמודים ל-σ הם אלה עם מבנה מחזורים (*), כלומר

$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$.

כיוון ש- $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2))$ קל לראות, לדוגמא, כי

$$\begin{aligned}
(1\ 2) &= e(1\ 2)e^{-1} \\
(1\ 3) &= (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)^{-1} \\
(1\ 4) &= (2\ 4)(1\ 2)(2\ 4)^{-1} \\
(2\ 3) &= (1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)^{-1} \\
(2\ 4) &= (1\ 4)(1\ 2)(1\ 4)^{-1} \\
(3\ 4) &= ((1\ 3)(2\ 4))(1\ 2)((1\ 3)(2\ 4))^{-1}
\end{aligned}$$

ולכן $\{e, (2\ 3), (2\ 4), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\}$ הינה קבוצה של נציגים.

שאלה 5

א. **הוכח שהחבורה הדיהדרלית D_n פתירה לכל n.**

ב. **יהי $f : S_5 \to D_{120}$ הומומורפיזם. הוכח כי $A_5 \le \ker f$.**

תשובה:

א) נתבונן בסדרה $D_n \trianglerighteq \langle\sigma\rangle \trianglerighteq \{e\}$. זו אכן סדרה תת-נורמלית:

1) $\{e\}$ הינה תת"ח נורמלית של כל חבורה, בפרט $\{e\} \trianglelefteq \langle\sigma\rangle$.

2) $[D_n : \langle\sigma\rangle] = \frac{2n}{n} = 2$, לכן $\langle\sigma\rangle \trianglelefteq D_n$.

בנוסף, המנות אבליות:

1) $\langle\sigma\rangle/\{e\} \simeq \langle\sigma\rangle$. זו חבורה ציקלית ובפרט אבלית.

2) $|D_n/\langle\sigma\rangle| = 2$, אבל כל חבורה מסדר ראשוני ציקלית ולכן אבלית. סך הכל, מצאנו סדרה תת-נורמלית של D_n עם מנות אבליות. לפי ההגדרה של פתירות, זה אומר כי D_n פתירה.

ב) ידוע כי $\ker f \trianglelefteq S_5$ לכל הומ' f מ-S_5 לחבורה כלשהי, בפרט עבור $f : S_5 \to D_{120}$. גם הוכחנו שלכל $5 \le n$, התת"ח הנורמליות היחידות של S_n הן $S_n, A_n, \{e\}$. אז כדי להוכיח כי $A_5 \le \ker f$, צריך רק לשלול את האפשרות $\ker f = \{e\}$.
אז נניח בשלילה כי $\ker f = \{e\}$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $\text{Im} f \simeq S_5/\ker f = S_5/\{e\} \simeq S_5$. כלומר, S_5 איזומורפית לתת"ח $\text{Im} f$ של D_{120}. לפי הסעיף א', D_{120} פתירה. הוכחנו בשיעור שכל תת"ח של חבורה פתירה הינה פתירה, לכן $\text{Im} f$ פתירה. כמו כן, הוכחנו כי S_n לא פתירה כאשר $n \ge 5$. סתירה. לכן לא יתכן ש-$\ker f = \{e\}$ ובהכרח $A_5 \le \ker f$.