אלגברה לינארית 1 - הרצאה 7

תזכורת:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $S \subseteq V$.

$Span(S) = \{$הצירופים הלינאריים של איברי $S\} =$

$= \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}, v_1, \ldots, v_n \in S\}$

זה תת-המרחב הקטן ביותר המכיל את S.

S פורשת את V אם $Span(S) = V$.

S בת"ל אם הצירוף הלינארי המתאפס היחיד שלה הוא הטריוויאלי.

כלומר, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בת"ל אם

$$\boxed{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}}}.$$

S ת"ל אם יש לה צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי.

הוכחנו:

משפט:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $S \subseteq V$. התנאים הבאים שקולים:

א. S ת"ל.

ב. קיים $v \in S$ שהוא צירוף לינארי של $S \setminus \{v\}$.

ג. קיים $v \in S$ כך ש-$Span(S \setminus \{v\}) = Span(S)$.

דוגמה:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל ב-$\mathbb{R}^3$, כי $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

אפשר להוציא את $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ וזה לא משפיע על ה-$Span$. $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

את $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ - אם נוציא זה ישנה את ה- Span.

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $A \subseteq V$ בת"ל.

א. לכל $v \in V \setminus A$, $A \cup \{v\}$ בת"ל $\iff$ $v \notin Span(A)$.

ב. לכל $a \in A$, הקבוצה $A \setminus \{a\}$ אינה פורשת את V.

<u>הוכחה:</u>

א. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש $A \cup \{v\}$ בת"ל. נניח בשלילה $v \in Span(A)$.

לכן v צירוף לינארי של איברי A.

נסמן $S = A \cup \{v\}$. בקבוצה S הווקטור v הוא צירוף לינארי של $S \setminus \{v\}$, ומהמשפט הקודם שהזכרנו S ת"ל, בסתירה להנחה שהיא בת"ל.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $v \notin Span(A)$. צ"ל: $S = A \cup \{v\}$ בת"ל.

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$(*) \quad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

עבור $v_1, \ldots, v_n \in S$ שונים ו- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.

אם לכל i, $v_i \neq v$, אז $v_1, \ldots, v_n \in A$ לכן $(*)$ הוא צירוף לינארי מתאפס של איברי A, אבל מהנתון A בת"ל, לכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}}$.

לכן נניח ש- v מופיע בצירוף הלינארי הנ"ל. נ"ח $v_1 = v$.

אז $v_2, \ldots, v_n \in A$.

אם $\alpha_1 = 0_{\mathbb{F}}$ אז $(*)$ הוא $\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$.

זה צירוף לינארי מתאפס של איברי A, ולכן שוב $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}}$.

ניתן המקרה $\alpha_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$. בעצם, נראה שהוא לא יכול לקרות.

אילו $\alpha_1 \neq 0_{\mathbb{F}}$, אז $(*)$ היה אומר

$$\alpha_1 v + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

$$\alpha_1 v = -\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n \quad | \cdot \alpha_1^{-1}$$

$$v = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 \underbrace{v_2}_{\in A} - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_n \underbrace{v_n}_{\in A}$$

לכן $v \in \operatorname{Span}(A)$, בסתירה להנחה.

ב. יהי $a \in A$. צ"ל: $A \setminus \{a\}$ אינה פורשת את V.

נניח בשלילה ש- $A \setminus \{a\}$ פורשת את V. לכן $\operatorname{Span}(A \setminus \{a\}) = V$.

אבל $a \in A \subseteq V$, לכן $a \in V$, ונקבל $a \in \operatorname{Span}(A \setminus \{a\})$.

זה אומר ש-a הוא צירוף לינארי של איברי $A \setminus \{a\}$, ולפי המשפט הקודם נקבל A ת"ל, בסתירה לנתון.

לכן $A \setminus \{a\}$ אינה פורשת את V.

$\square$

בסיס ומימד

<u>למה:</u> (למת ההחלפה של שטייניץ)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, תהי $A \subseteq V$ בת"ל, ותהי $B \subseteq V$ פורשת את V. אז לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $b \notin A \setminus \{a\}$ וגם $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ בת"ל.

<u>דוגמה:</u>

$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ בת"ל. $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

$a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ - אפשר להחליף אותו בעצם בכל איבר של B ולהישאר עם קבוצה בת"ל.

$a=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ - אפשר להחליף אותו ב- $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

אם נחליף אותו למשל ב- $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=b$, נקבל $(A\setminus\{a\})\cup\{b\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ <u>בת"ל</u>

<u>הוכחת הלמה:</u>

$A\subseteq V$ בת"ל, $B\subseteq V$ פורשת את V.

נניח בשלילה שקיים $a\in A$ כך שלכל $b\in B$, $b\in A\setminus\{a\}$ או $(A\setminus\{a\})\cup\{b\}$ ת"ל.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{רצינו: } (A\setminus\{a\})\cup\{b\} \text{ בת"ל} & \forall a\in A\ \exists b\in B: b\notin A\setminus\{a\}\ \wedge \\ \text{שלילה: } (A\setminus\{a\})\cup\{b\} \text{ ת"ל} & \exists a\in A\ \forall b\in B: b\in A\setminus\{a\}\ \vee \end{array}}$$

יהי $b\in B$. נחלק לשני מקרים:

- $b\in A\setminus\{a\}$ $\Leftarrow$ בפרט, $b\in Span(A\setminus\{a\})$.
- $\underbrace{(A\setminus\{a\})}_{S}\cup\{b\}$ ת"ל. נסמן $S=A\setminus\{a\}$, אז S בת"ל (כי A בת"ל), ו- $S\cup\{b\}$ ת"ל. מהמשפט הקודם, בהכרח $b\in Span(S)=Span(A\setminus\{a\})$.

הראינו שבכל מקרה, $b\in Span(A\setminus\{a\})$. לכן $B\subseteq Span(A\setminus\{a\})$.

מכאן $V\underset{\uparrow \atop B \text{ פורשת את } V}{=}Span(B)\subseteq Span(A\setminus\{a\})\subseteq V$.

זה מראה שבהכרח $Span(A\setminus\{a\})=V$. לפי ההגדרה, זה אומר ש- $A\setminus\{a\}$ פורשת את V, בסתירה לסעיף ב' של המשפט הקודם.

מהסתירה הלמה הוכחה.

□

הגדרה:

אומרים ש- V נוצר סופית אם קיימת לו קבוצה פורשת סופית.

דוגמאות:

$\mathbb{F}^n, \mathbb{F}_n[x], \mathbb{F}^{m\times n}$ נוצרים סופית.

$\mathbb{F}[x]$ לא נוצר סופית.

למשל, מדוע $\mathbb{F}_n[x]$ נוצר סופית? כי $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ פורשת אותו.

$\mathbb{F}^n$ נוצר סופית? $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת אותו.

משפט:

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $A \subseteq V$ בת"ל ותהי $B \subseteq V$ פורשת. אז $|A| \leq |B|$.

$|A| =$ כמות הווקטורים ב- A

הוכחה:

ראשית נתחיל מהמקרה שבו B סופית.

נניח בשלילה שיש ב- A יותר איברים, כלומר אם $|B| = n$ אז $|A| \geq n+1$.

לכן קיימים ב- A $n+1$ וקטורים שונים $a_1, \dots, a_{n+1}$. A בת"ל,

לכן גם $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ בת"ל.

נשתמש בלמת ההחלפה של שטייניץ על a_1: קיים $b_1 \in B$, $b_1 \notin \{a_2, \dots, a_{n+1}\}$

וגם $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}\}$ בת"ל.

נשתמש בלמת ההחלפה שוב, הפעם על a_2: קיים $b_2 \in B$ $b_2 \notin \{b_1, a_3, a_4, \dots, a_{n+1}\}$,

כך ש- $\{b_1, b_2, a_3, a_4, \dots, a_{n+1}\}$ בת"ל.

נמשיך כך עוד $n-2$ פעמים עד שנקבל את הקבוצה $\{\overbrace{b_1, b_2, \dots, b_n}^{B}, a_{n+1}\}$ שהיא בת"ל.

מההנחה, B פורשת את V, לכן a_{n+1} הוא צירוף לינארי של $b_1,\dots,b_n$

מהמשפט בתחילת השיעור, $\{b_1,\dots,b_n,a_{n+1}\}$ ת"ל, בסתירה.

לכן ב- A יש לכל היותר n וקטורים, כלומר $|A|\leq|B|$.

מה יקרה אם B היא אינסופית?

V נוצר סופית לכן קיימת לו קבוצה פורשת סופית S אפשר להשתמש במקרה הראשון שהוכחנו כדי לראות $|A|\leq|S|$. מצד שני, S סופית ו-B היא אינסופית, לכן $|A|\leq|S|<|B| \Leftarrow |A|<|B|$.

$\square$

מסקנה:

במרחב וקטורי נוצר סופית, כל קבוצה בת"ל היא סופית.

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $B\subseteq V$ נקראת בסיס של V אם היא בת"ל ופורשת את V.

דוגמאות:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=B$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. באופן כללי, למרחב וקטורי יש הרבה בסיסים.

נוכיח ש-B בסיס:

- B בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\\alpha+\beta=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=0\\\beta=0\end{matrix}$$

- B פורשת: יהי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. נמצא $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש- $\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=x\\\alpha+\beta=y\end{matrix}\Rightarrow\beta=y-x$$

זה מראה שלכל וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ יש פתרון.

$$x\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(y-x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$. נקרא <u>הבסיס הסטנדרטי</u> של $\mathbb{F}^n$.

ד. $\{1,x,\dots,x^n\}$ בסיס של $\mathbb{F}_n[x]$. זהו <u>הבסיס הסטנדרטי</u> של $\mathbb{F}_n[x]$.

ה. ניקח $V=\mathbb{F}^{m\times n}$. לכל $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ נגדיר

$$E_{ij}=\begin{array}{c c}& j\\ i & \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots\\ & 1 & \\ 0 & \cdots & \end{pmatrix}\end{array}$$

למשל

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

$$E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

אפשר גם לסמן כך: $(E_{ij})_{kl}=\begin{cases}1, & i=k,\ j=l\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

$$\boxed{(E_{12})_{kl}=\begin{cases}1, & k=1,\ l=2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}}$$

אז $\left\{E_{ij}\ \middle|\ \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}\right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{F}^{m\times n}$. זה הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{m\times n}$.

למשל, $\mathbb{F}^{2\times3}$

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ו. $V=\{0\}$ מרחב האפס. הבסיס ל-V הוא $\emptyset$.

<u>הערות:</u>

א. בדרך כלל, למרחב וקטורי יש הרבה בסיסים.

ב. אם S קבוצה בת"ל, אז S בסיס של $\mathrm{Span}(S)$.

משפט:

לכל מרחב וקטורי ק"ים בסיס.

הוכחה:

אנחנו נוכיח רק למקרה של מרחב נוצר סופית.

למה: יהי V מרחב וקטורי שיש לו קבוצה פורשת בעלת n איברים. אז קיים ל-V בסיס.

נוכיח באינדוקציה על n. נסמן את הקבוצה הפורשת S.

$n=0 \Leftarrow |S|=0 \Leftarrow S=\phi \Leftarrow V=Span(S)=\{0\}$ מרחב האפס, ויש לו בסיס שהוא ϕ.

נניח שהטענה נכונה עבור כל מרחב וקטורי בעל קבוצה פורשת מגודל n.
יהי V מרחב וקטורי שנפרש ע"י קבוצה S מגודל $n+1$.
אם S בת"ל - סיימנו, כי S בסיס של V.
אחרת, S ת"ל $\Leftarrow$ קיים $v\in S$ כך ש-$Span(S\setminus\{v\})=Span(S)$.
אבל S פורשת את V, לכן $Span(S\setminus\{v\})=Span(S)=V$.
זה מראה ש-$S\setminus\{v\}$, קבוצה בעלת n איברים, פורשת את V, ומהנחת האינדוקציה יש ל-V בסיס. $\square$

משפט: (יחידות ההצגה)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ נוצר סופית, ויהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V.
אז לכל $v\in V$ קיימת הצגה יחידה
$v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$
עבור $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$.

הוכחה:

יהי $v \in V$. קיים צירוף לינארי כנדרש כי B פורשת את V.

לגבי היחידות: נניח

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$. צ"ל $\alpha_i = \beta_i$ לכל i.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0_V$$

אבל B בסיס, לכן בת"ל, ומכאן שלכל i, $\alpha_i - \beta_i = 0_{\mathbb{F}} \Leftarrow \alpha_i = \beta_i$. □

טענה:

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהיו B_1, B_2 בסיסים של V.

אזי $|B_1| = |B_2|$.

הוכחה:

B_1 בסיס של V $\Leftarrow$ B_1 בת"ל

B_2 בסיס של V $\Leftarrow$ B_2 פורשת את V

טענה שראינו קודם $\Leftarrow$ $|B_1| \le |B_2|$.

B_1 בסיס של V $\Leftarrow$ B_1 פורשת את V

B_2 בסיס של V $\Leftarrow$ B_2 בת"ל

טענה שראינו קודם $\Leftarrow$ $|B_2| \le |B_1|$.

$|B_1| = |B_2|$

□

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $B \subseteq V$ בסיס של V.

נגדיר את <u>המימד</u> של V להיות $\dim V = \dim_{\mathbb{F}} V = |B|$. (dimension)

דוגמאות:

א. $\dim \mathbb{F}^n = n$.

ב. $\dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$.

ג. $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$. $\{1, x, \dots, x^n\}$ – $n+1$ איברים.

ד. $\dim \{0\} = 0$. (הבסיס הוא $\emptyset$)

ה. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{C}$. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

בסיס של $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$: $\{1, i\}$.

ו. $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}$. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

בסיס של $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$: $\underset{B}{\{1\}}$.

עוד בסיס: $\{\pi + i\}$.

$v = 1+i \in V$

$\alpha = 1+i \in \mathbb{F}$

$\alpha \cdot \underset{B}{1} = v$

מסקנה:

אם $A \subseteq V$ בת"ל ו- $S \subseteq V$ פורשת, $|A| \le \dim V \le |S|$.

הוכחה:

יהי B בסיס של V. A בת"ל, B פורשת את V $\Leftarrow |A| \le |B| = \dim V$!

B בת"ל, S פורשת את V $\Leftarrow \dim V = |B| \le |S|$.

$\square$

טענה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

א. אם $A \subseteq V$ קבוצה בת"ל מקסימלית (כלומר לכל $A \subsetneq T \subseteq V$, T ת"ל),

אז A בסיס של V.

ב. אם $S \subseteq V$ קבוצה פורשת מינימלית (את V) (כלומר לכל $T \subsetneq S$, T אינה פורשת את V), אז S בסיס של V.

הוכחה:

א. תהי $A\subseteq V$ קבוצה בת"ל מקסימלית, נ"ל ש-A פורשת.

נניח בשלילה ש-A אינה פורשת את V. לכן קיים $v\notin Span(A)$.

לכן $A\cup\{v\}$ גם בת"ל, בסתירה למקסימליות של A.

לכן A פורשת את V, ומההנחה היא בת"ל $\Leftarrow A$ בסיס של V.

ב. תהי $S\subseteq V$ קבוצה פורשת מינימלית. נ"ל ש-S בת"ל.

נניח בשלילה ש-S ת"ל. לכן קיים $v\in S$ כך ש-$Span(S\setminus\{v\})=Span(S)$.

אבל אז גם $S\setminus\{v\}$ פורשת את V, בסתירה למינימליות של S.

לכן S בת"ל, ומההנחה היא פורשת $\Leftarrow S$ בסיס של V.

$\square$

טענה:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

א. אם $A\subseteq V$ קבוצה בת"ל, אז קיים בסיס B של V כך ש-$A\subseteq B$.

במילים: אפשר להרחיב כל קבוצה בת"ל לבסיס של V.

ב. אם $S\subseteq V$ קבוצה פורשת של V, אז קיים בסיס B של V כך ש-$B\subseteq S$.

במילים: אפשר לצמצם כל קבוצה פורשת של V לבסיס של V.

הוכחה:

א. נסתכל על אוסף כל תת-הקבוצות של V שהן בת"ל ומכילות את A.

הגודל של כולן חסום ע"י $\dim V$. נבחר אחת מקסימלית

ביחס להכלה, ומהטענה הקודמת נקבל בסיס B של V שמכיל את A.

ב. נסתכל על אוסף תת-הקבוצות של S שפורשות את V, ונבחר

בו קבוצה מינימלית ביחס להכלה. לפי הטענה הקודמת, נקבל

בסיס B של V שמוכל ב-S.

$\square$

דוגמה:

ניקח $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$. זו תת קבוצה של $\mathbb{R}^4$.

היא פורשת תת-מרחב $U=Span(S)$.

איך נמצא בסיס ל-U?

שמים את הווקטורים של S בעמודות מטריצה, ומדרגים. מתוך S המקורית שולפים את הווקטורים שבעמודה שלהם יש משתנה תלוי. הווקטורים האלו יהוו בסיס ל-$Span(S)$.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\2&1&2&3\\0&-1&1&-2\\1&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-2&3\\0&-1&1&-2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-2&3\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-2R_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-2&3\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

זו צורה מדורגת. המשתנים התלויים הם x_1,x_2,x_3.

לכן בסיס של $Span(S)$ הוא שלושת הווקטורים הראשונים ב-S:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}. \qquad \dim Span(S)=3$$

<u>שימו לב:</u> חשוב לקחת את הווקטורים המקוריים ולא את העמודות החדשות.

משפט: (משפט השליש חינם)

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ותהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה.
אם שניים מהתנאים הבאים מתקיימים, אז גם השלישי מתקיים (חינם),
ו-S בסיס של V:

א. S בת"ל.
ב. S פורשת את V.
ג. $|S| = \dim V$.

הוכחה:

$\boxed{\text{א} + \text{ב} \Leftarrow \text{ג}}$ נניח ש-S בת"ל ופורשת אז לפי ההגדרה S בסיס
ולפי הגדרת המימד $|S| = \dim V$.

$\boxed{\text{א} + \text{ג} \Leftarrow \text{ב}}$ נניח ש-S בת"ל ו-$|S| = \dim V$. יהי B בסיס של V
כך ש-$S \subseteq B$. אבל $|S| = \dim V = |B|$, לכן $S = B$.
זה מראה ש-S בסיס של V.

$\boxed{\text{ב} + \text{ג} \Leftarrow \text{א}}$ נניח ש-S פורשת ו-$|S| = \dim V$. יהי B בסיס של V
כך ש-$B \subseteq S$. אבל $|S| = \dim V = |B|$, לכן $S = B$.
זה מראה ש-S בסיס של V. $\square$

דוגמה:

נראה ש-$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

$|B| = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, לכן מספיק להוכיח ש-$B$ בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אין משתנים חופשיים
$\Leftarrow$ B בת"ל.

B בת"ל ו- $|B|=2=\dim\mathbb{R}^2$, לכן לפי משפט השלישי חינם נקבל ש-B בסיס של $\mathbb{R}^2$.

<u>מסקנה:</u>

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $U\leq V$ תת-מרחב.

א. $\dim U\leq \dim V$.

ב. אם $\dim U=\dim V$ אז $U=V$.

<u>הוכחה:</u>

א. יהי B בסיס של U. $B\subseteq V$ ו- B בת"ל, לכן

$$\dim U=|B|\underset{\uparrow}{\leq}\dim V$$

מימד $\geq$ |בת"ל|

ב. נניח ש- $\dim U=\dim V$. יהי B בסיס של U.

B בת"ל עם $|B|=\dim U=\dim V$ $\overset{\text{השלישי חינם}}{\Longrightarrow}$ B בסיס של V. לכן

B פורש את V, כלומר $U\underset{\uparrow}{=}\mathrm{Span}(B)=V$.

B בסיס של U

$\square$

<u>דרכי "ייצוג" של מרחבים וקטוריים</u>

מרחבים וקטוריים אפשר לכתוב במספר דרכים שקולות:

$$V=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=p(2)=0\}$$

א. כאוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית, למשל

$$V=\left\{a+bx+cx^2+dx^3 \;\middle|\; \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+2b+4c+8d=0 \end{cases}\right\}$$

ב. בצורה פרמטרית

$$V=\{(6d+2c)-(7d+3c)x+cx^2+dx^3 \mid c,d\in\mathbb{R}\}$$

ג. באמצעות קבוצה פורשת/בסיס:

$$V = \operatorname{Span}\{2-3x+x^2,\ 6-7x+x^3\}$$

איך עוברים בין הצורות?

פתרונות ← פרמטרית: פותרים את מערכת המשוואות, מוצאים את הפתרון הכללי ומקבלים את הצורה הפרמטרית.

פרמטרית ← פורשת: בכל פעם בוחרים את אחד הפרמטרים להיות 1, השאר 0.

פורשת ← פתרונות: לוקחים איבר כללי במרחב, משווים לצירוף לינארי כללי של איברי S. מקבלים מערכת משוואות של המקדמים. מדרגים אותה ומוודאים שלא יהיו שורות סתירה.

$$\alpha(2-3x+x^2)+\beta(6-7x+x^3) = a+bx+cx^2+dx^3$$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & a \\ -3 & -7 & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & x \longrightarrow = 0 \\ 0 & 0 & x \longrightarrow = 0 \end{array}\right)$$